

## A TÉRI VIZUÁLIZÁCIÓ FEJLESZTÉSE TRANSZFORMÁCIÓS GEOMETRIAI FELADATOKKAL

**Salat Annamária-Enikő\* és Séra László<sup>o</sup>**

\**Babeş-Bolyai Tudományegyetem Pszichológia Kar, Kolozsvár*

<sup>o</sup>*ELTE Pszichológiai Intézete, Budapest*

Vizuális-téri képességnek a két- és háromdimenziós alakzatok észlelésének és az észlelt információknak tárgyak és viszonylatok megértésére és problémák megoldására való felhasználásának képességét nevezzük. Ez a meghatározás a téri ingerek kódolását, felidézését, összehasonlítását és átalakítását lehetővé tevő, egymással összefüggő képességek sorára utal, amelyekkel különböző kísérleti- vagy papír-ceruza feladatokat meg tudunk oldani. Az ilyen téri feladatok teljesítésében az emberek különböznek. Az egyéni különbségek mérésére igen sokféle feladatot (pszichológiai tesztet) dolgoztak ki (lásd *Séra, Kárpáti és Gulyás, 2002*), amelyekkel egy probléma megoldásában elkülöníthetők egy tárgy manipulálhatóságának az elemzéséhez, illetve térbeli irányultságának kiigazításához szükséges képességek. Az első esetben vizualizációs, az utóbbi esetben pedig orientációs képességekről beszélünk. (A pedagógiában a térszemléletet kifejezés honosított meg ezen képességek jelölésére.) A pszichológiai kutatások eredményeit összefoglalva *McGee* (1979. 900. o.) megállapítja: „*ha a tapasztalati tényezők jelentősek kiemelkedő téri képességek kialakulásában, elvárhatjuk, hogy a gyakorlás megfelelő téren javulást eredményez a téri vizualizáció és az orientáció tesztjeinek teljesítményében*”. Hasonló következtetésre jut *Lean* (1981) a téri képességek gyakorlásának irodalmával kapcsolatban: „*A bizonyítékok [ ... ] jelzik, hogy ezek a változatos téri készségek megfelelő tapasztalatokkal gyakorolhatók. Rövid gyakorlás képi anyagokkal elég ahhoz, hogy a képi mélységészlelést előidézze; viszonylag rövid gyakorlás elegendő, hogy javuljon a személyek teljesítménye téri tesztjelemben; változatos téri konvenciók tanítása és diagramokkal való gyakorlás javítja a geometriai teljesítményt; és úgy tűnik, megfelelően elegendő tapasztalat növeli a teljesítményt téri tesztekben, ahhoz hasonlóan, mint a rajztanfolyamokon. [ ... ] Sikeresebb gyakorlási vizsgálatokat végeztek fiatalabb gyerekeknél (5 évesek, 5. és 7. osztályosok), amíg idősebb személyekkel ez kevésbé volt sikeres*” (10–16. o., idézi *Eliot, 1987. 128. o.*). Kérdéses, hogy milyen gyakorlás hatékony, illetve hogy átvihető-e az egyik feladat gyakorlása egy másik típusú feladatra. Okkal gondolható, hogy az eredmény függ a tanulási/tanítási módszertől, és olyan kutatásokra van szükség, amelyek mind a gyermekek, mind a felnőttek számára feltárják a téri képességek fejlesztésére szolgáló leghatékonyabb módszereket.

### **Pszichológiai kutatások a téri képességek fejleszthetőségéről**

A téri képességek fejleszthetőségével kapcsolatos laboratóriumi vizsgálatok is ismertek, amelyek részben a különböző megoldási stratégiákat elemezték. *Kyllonen, Lohman és Snow* (1984) összehasonlították az eltérő típusú stratégiákat, amelyeket a személyek egy fejben végzett papírhajtogatási feladat módosított változatának megoldásaiban alkalmaztak. A feladat megoldásához képzeletbeli forgatásra, összehasonlításra és fontosabb részletekre irányuló figyelemre lehet szükség. Háromféle tanulási stratégiát (feltételt) vizsgáltak: (1) elemző és lépésenkénti összehasonlítási folyamatokra összpontosító stratégia, amely gyengébb teljesítménnyel társul a téri képesség tekintetében; (2) egészes stratégia párhuzamos összehasonlítási folyamatok hangsúlyával; (3) visszajelzés alkalmazása a probléma bemutatásával és a pontos megoldások megadásával. Kísérletükben igazolták azt a feltevésüket, hogy a különböző téri képességekkel jellemezhető személyek különböző tanulási stratégiákat használnak és ez eltérő módon befolyásolja tanulásukat.

A verbális és téri képességeik alapján csoportosított középiskolás diákok az elemző feltételnél világos szóbeli és vizuális oktatást kaptak a feladatról, a szabályokról és a stratégiáról, majd megnézhettek egy negyedórás hangos filmet ezekről. Az egészes (vizualizációs) feltételnél csak egy bemutatást láthattak némafilmen a lapok összehajtásáról, átlukasztásáról és kiterítve a lyukak helyéről. (A használt papírhajtogatási tesztben az összehajtott lapok átlukasztásainak a helyét kellett megtalálni, egy lépésenként kiterített modellt megnézése után, lásd *Ekstrom, French, Harman és Dermen*, 1990). A visszajelzési feltételnél a személyek megkapták a megoldásokat és összehasonlíthatták válaszukat a pontos modellel. Kiderült, hogy a felkészítés hatása a tanuló képességétől függő. A téri és verbális képességek mérésében magas pontszámot elérők képesek voltak stratégiájukat a feladat igényeinek megfelelően változtatni. Az alacsony téri és alacsony verbális képességűeket valahogy segítette a visszajelzés. Az elemző oktatási feltételben jól dolgoztak az alacsony téri és magas verbális képességű személyek. Tehát az eltérő téri képességek tanításához eltérő típusú stratégiák szükségesek. *Kyllonen és mtsai.* (1984) egy másik kísérletben a vizualizációs feladatok (ebben az esetben egy szintézis feladat) stratégiaváltási modelljének jelentőségét demonstrálták. A mentális folyamatokat összetevőikre bontva leírták, ahogy a személyek a legjobb teljesítmény érdekében az egyik vagy másik megközelítést hajlékonyan alkalmazzák (kódolásban, szintézisben, összehasonlításban) a probléma kívánalmai szerint. Úgy találták, hogy bizonyos esetekben a képességbeli különbség alapozza meg a stratégia választását.

Kétdimenziós minták mentális forgatásának erőteljes gyakorlási hatásával foglalkozott *Bethel-Fox és Shepard* (1988). Kísérletükben 17–23 éves személyeknek egy négyzet alakú kitöltött négyzetmintáit kellett megadott irányba képzeletben elforgatni, majd annak befejeztével egy elforgatott tesztmintáról kellett eldönteni, hogy azonos-e az eredetivel. A komplexitásnak (a minta tömörsége) meghatározó szerepe volt, de ha a személyek elég jól megtanultak egy mintát (körülbelül 250 gyakorló próba után), többségük számára a döntési idő lecsökkent és a komplexitástól függetlenül gyors döntéseket tudtak hozni. Ezek a személyek a minta egészes feldolgozásával dolgoztak, de voltak akik ver-

bálishan támogatott elemző módszerrel dolgozotak, náluk az inger komplexitásának hatása csak részben csökkent a kiterjedt gyakorlással.

Lohman és Nichols (1990) a *téri képességeket* a személy *viszonylag állandó tulajdonosságának*, a *kognitív folyamatok és a tudásstruktúra változásán keresztül* más képességekre átvihető, a gyakorlással és a tapasztalattal *fejlődő* képességeknek tekintik. A képességfejlődés végbemehet a deklaratív tudás elsajátításán és átszerveződésén keresztül (Olson és Bialystok, 1983), vagy alakulhat úgy, hogy a tevékenység elvégzéséhez szükséges tudás gyakorlásával (procedurális tanulás) új készségek fejlődnek ki, vagy a meglévők finomodnak. A deklaratív-procedurális megkülönböztetés a *tudni mit* és a *tudni hogyan* tanulás különbségére utal; a kétféle tanulásnak egyformán szerepe lehet a képességek fejlesztésében. Lohman és Nichols (1990) az egyik kísérletében az 1200 (Shepard és Metzler-féle) háromdimenziós forgatási feladatot megoldó személyek jelentős javulást mutattak a megoldások pontosságában és négy téri (gyors forgatási és vizualizációs) tesztben. Ebben a feladatban azonos vagy különböző, mélységben vagy síkban elforgatott egyszerű háromdimenziós alakzatok azonosságát (különbségét) kell megállapítani. A két alakzat egyeztetéséhez képzeletbeli elforgatására van szükség. A nemek közötti különbség csökkent a gyakorlás hatására. Egy további vizsgálatban a forgatási problémák gyakorlása nélkül adták kétszer ugyanazt a négy tesztet. A két kísérlet eredménye hasonlóan mutatkozott, így a hatás elsősorban a teszt gyakorlásának volt tulajdonítható, de mind az alacsony, mind a magas téri képességű személyeknél. Egy harmadik kísérletben a személyek nagyszámú „vizuális összegzési” feladat (El Koussy) megoldását gyakorolhatták visszajelzett és anélküli feltételnél. A kapott eredmények alapján Lohman és Nichols (1990) megállapította, hogy a mentális forgatás gyakorlása nem eredményez mindenkinél jelentős gyarapodást. A forgatás, tükrözés stb. elvégzéséhez szükséges kognitív képességek a gyermekkorban alakulnak ki, és a jó és gyengébb képességűek között különbségeket eredményezhetnek a belső reprezentációk kialakításában. A tesztekben magas pontszámot elérő jó téri képességűek különösen képesek fenntartani és átalakítani vizuális képzeteiket (Lohman, 1988). Így azok a serdülők és felnőttek „akiknél a gyermekkorban nem alakultak ki jól ezek a képességek, úgy látszik hasznosítják azt az oktatást, amely kifejezetten ezeket a képességeket modellezi” (példájuk egy papírhajtogatást bemutató film) (89. o.). Tehát a téri feladatok gyakorlása jelentős javulást eredményezhet a teljesítményben, különösen a gyorsaságban, s főleg az egyszerű, gyors tesztekben. Lohman és Nichols hangsúlyozzák a fejleszthetőséget: „a téri kognitív képességek fejleszthetők azoknál a személyeknél, akik nem eléggé gyakorlottak egy adott készség teljesítésében vagy a tárgyak belső reprezentációinak átalakításában” (90. o.). A hatás változatos feladatokkal biztosítható, de mint írják: „a legnagyobb változás a téri képességben nem az adott képességek gyakorlásával, hanem olyan tapasztalatokkal érhető el, amelyek gazdagabb deklaratív tudásalap fokozatos kialakítását teszik lehetővé” (Lohman, 1988. 90. o.).

### **Pedagógiai vizsgálatok a téri képességek fejleszthetőségéről**

A téri-vizuálizációs programozott oktatás pozitív hatásáról számolt be Brinkmann (1966) nyolcadikos gyerekeknél a rendes matematikai órák közé iktatott három hetes ön-

instrukciós geometriai programmal. A gyerekek gyakorolták a geometriai idomok megkülönböztetését és a minták hajtogatását, illetve a kivágott idomok mintáival való manipulációt. A gyakorlási teljesítményről visszajelzést kaptak. Egy téri teszt (Téri relációk teszt, *Bennett és mtsai.*, 1974) utótesztjében a kísérleti csoportnál 18 ponttal volt jobb a teljesítmény, a nem gyakorló kontrollcsoportnál viszont csak három ponttal. Más vizsgálatokban a modellezés gyakorlásának hatását mutatták ki 12–14 éves gyerekeknél a mentális forgatási (MRT) (*Vandenberg*, 1975) vagy más téri tesztek (*McClosky*, 1979) teljesítményeire. A megfelelő program alkalmazásának sikerességét példázhatják *Rowe* 13 évesekkel végzett vizsgálatának eredményei (ismerteti *Eliot*, 1987. 78. o.), aki kétdimenziós gondolkodást és alakzatok kialakítását, de manipulációját nem igénylő feladatokat tartalmazó, illetve háromdimenziós gondolkodást és képzeleti manipulációt igénylő feladatokról álló különböző programokkal mutatott ki javuló teljesítményt. A kétdimenziós gyakorlás mind a magas téri, mind az alacsony tesztpontszámú személyek téri feladatteljesítményét befolyásolta, de a háromdimenziós gyakorlás az alacsony téri képességűeknél csak a kétdimenziós tesztfeladatokban segített. A téri képességek egyéni különbségeinek jelentőségét a tanulásban egyéb területen is tapasztalták. *Mayer és Sims* (1994) például úgy találták, hogy a főiskolás személyek, s különösen a magas téri képességűek, akik egyébként nem voltak jártasak a biciklipumpa mechanikájának vagy a légzés biológiai működésének témájában, általában jobban tanultak, ha a számítógépes animációt (képet) és a szóbeli leírást egyidejűleg kapták, mint ha szétválasztva. A szerzők értelmezése *Paivio* kettős kódolási elméletére támaszkodik, amely szerint értelmes tanulás során vonatkoztatási kapcsolatok alakulnak ki a vizuális és verbális információk párhuzamosan kiépülő leképeződései között (*Clark és Paivio*, 1991; *Paivio*, 1991), amelyek lehetővé teszik a két rendszer közötti átjárhatóságot. A tanulást követően a több ötletes megoldást felvető magas téri képességűek könnyebben tudnak kiépíteni mentális kapcsolatokat a vizuális és verbális alapú reprezentációk között, amíg ez nem jellemzi a téri tesztekben alacsony pontot elérőket, akiknek nagyobb erőfeszítést kell tenni a vizuális reprezentáció kiépítéséhez.

Számos további eredmény utal a téri-vizualizációs teljesítmények javulására megfelelő gyakorlást követően (*Stericker és LeVesconte*, 1982; *Lord*, 1985) és újabban beszámoltak a vetületek, tükrözések, forgatások stb. ismeretét nyújtó geometriai oktatás 13–14 éves kanadai gyerekek vizualizációs képességére gyakorolt pozitív hatásáról is (*Kirby és Boulter*, 1997). Mind a téri tesztpontok (rejtett ábra, kártyaforgatás, felszínkialakítás tesztek – *Ekstrom és mtsai.*, 1990), mind a geometriai tudásszint szempontjából javulást találtak a kurzus végére, de függetlenül attól, hogy a személy a tanulási csoport vagy a geometriai kurzusban részt nem vevő kontrollcsoport tagja volt-e. A következtetés szerint a téri képességetesztek szerinti hátrányban lévőknél javítható a képesség, ha az oktatás eléggé alapos. Azonban a rövid gyakorlási idő (mindössze 10 nap, naponta egy 40 perces fejlesztő órával), valamint az azonos elő- és utóteszt alkalmazása miatt *Kirby és Boulter* (1997) ezen következtetéseivel szemben erős fenntartásaink támadhatnak. A szerzők egy korábbi vizsgálatukban (*Boulter és Kirby*, 1994) azt is kimutatták, hogy a felhasznált transzformációs geometriai problémák megoldásában az 7–8. osztályosok főleg egészes, ritkábban elemző stratégiát használnak, de a feladat nehézségétől függően e két stratégia váltására is képesek.

## Metakognitív stratégiák használata

*Kyllonen és munkatársainak* a téri képességek fejlesztésével kapcsolatos, fentebb ismertett vizsgálati rámutattak a megoldási stratégiák váltásának, illetve a szabályok, megoldásmódok világos kifejtésével történő tanításának szerepére. A geometriai problémamegoldásban általában nagy jelentőséget tulajdonítanak a metakognitív készségeknek (a kognitív folyamatok megértése és ellenőrzése), s számos beszámoló ismert a tanított stratégia-használat jótékony hatásáról (összefoglalóan lásd pl. *Schoenfeld*, 1985; *Sternberg* és *Ben-Zeev*, 2001). *Chinnappan* és *Lawson* (1996) végrehajtó stratégia-tanítást alkalmaztak, amely a probléma újraolvasására, a tervezésre és az ellenőrzésre összpontosított. A kísérlet ideje alatt elsajátított tudásanyag közvetlen alkalmazását igénylő „egyszerű” geometriai feladatokban nem mutatkozott különbség a kísérleti és a kontrollcsoport között, de a „közeli” és nagyobb nehézségi fokú „távoli” transzfer-feladatokban a végrehajtó stratégiát tanuló csoport jobban teljesített. Ez felveti, hogy a terület-specifikus tudás szükséges, de nem elégséges feltétele a problémamegoldásnak, ugyanis a tudást az adott kontextusban fel is kell tudni használni.

## Vizsgálatok

Az alábbiakban két vizsgálat eredményeiről számolunk be. Az első vizsgálat a transzformációs geometria tanításának hatásával foglalkozik a téri vizualizációs és problémamegoldási teljesítményre, a második vizsgálat pedig az explicit metakognitív stratégiahasználat hatását tanulmányozta.

### 1. vizsgálat

Az 1. vizsgálat a vizualizációs-transzformációs geometriai tanításának 12–13 évesek geometriai problémamegoldására és téri teszteredményeire gyakorolt hatását demonstrálja. A vizsgálat feltevései szerint a vizualizációs geometriai tréningben résztvevők (téri csoport) jobban teljesítenek a geometriai problémamegoldási feladatokban (térbeli alakzatok rekonstrukciójában) és a standard téri tesztekben, mint a hagyományos módon tanított kontrollcsoport (hagyományos csoport) tagjai.

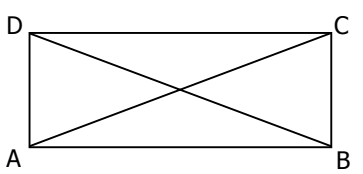
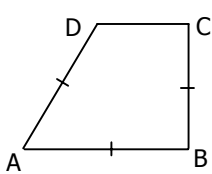
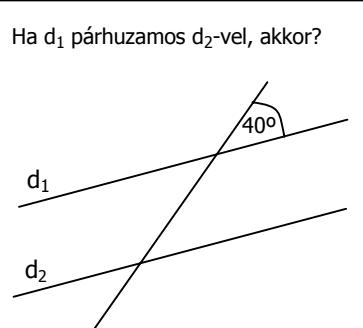
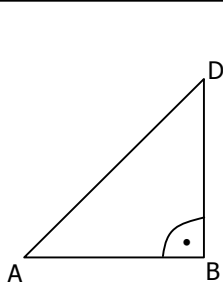
### Módszer

#### *Személyek*

Két iskola 20–20 fős VI. osztályának tagjai képezték a téri (kísérleti) és a hagyományos csoportot. Az átlag életkor 12 és  $\frac{1}{2}$  év. Mindkét csoportban fele-fele arányban voltak lányok és fiúk. A két csoport intelligenciában (Raven), vizuális emlékezetben (Rey), téri előtesztekben és a geometriai ismeretfelmérő teszt eredményeiben nem különbözött (t-próba).

*Eszközök*

*Geometriai tesztek:* tíz tükrözéses síkgeometria feladat (GTT); három translációs feladat (GTR); négy forgatásos feladat (GTF); három darabolásos geometriai feladat (GTD); három forgásfelület kialakító feladat (GFFO). Értékelés: feladatonként max. 10 pont. Az 1. ábrán láthatók példák a különböző típusú feladatokra.

<i>Darabolás (GTD)</i>	<i>Tükrözés (GTT)</i>
 <p>Darabold fel a téglalapot és rakj össze az ABCD területével azonos területű háromszöget!</p>	 <p>a) Rajzold meg ABCD tükörképét BC-re nézve, majd ugyanazon rajzon tükrözd ABCD-t AB-re nézve majd a B pontra nézve! b) A kapott alakzat neve és sajátosságai:</p>
<i>Transzláció (GTR)</i>	<i>Forgásfelület kialakítás (GFFO)</i>
<p>Ha <math>d_1</math> párhuzamos <math>d_2</math>-vel, akkor?</p> 	 <p>a) Forgasd meg a térben ABC háromszöget az AB oldala mentén és rajzold le! b) A kapott forgatás neve:</p>

*1. ábra*  
*Példák az alkalmazott geometriai tesztek tételeire*

*Téri tesztek:* Kártyaforgatás, Felületkialakítás és Papírhajtogatás. Az első teszt a téri orientációs (térei relációk) faktort, az utóbbi kettő a vizualizációs faktort súlyozza

(Ekstrom, French, Harman és Dermen, 1990). A kártyaforgatási próbában egy kétdimenziós alakzat síkban elforgatott változataiból kell az azonosakat kiválasztani. A felületkialakítás próbában el kell képzelni, hogy egy papírlapot hogyan kell megadott élvonalak mentén behajtogatni, hogy egy adott tárgyat kapjunk, s egy válaszlapon azonosítani kell a megfelelő éleket. A papírhajtogatási tesztben az összehajtott lapok átlukasztásainak a helyét kell azonosítani egy széthajtogatott lapon, több lehetséges változat közül választással. (Hasonló próbákat tartalmaz egy nálunk kifejlesztett Térsemlélet teszt próbasorozata is; lásd Séra, Kárpáti és Gyulyás, 2002.)

Felvettünk egy Rey-tesztet a rövid távú memória vizsgálatára és a Raven tesztet.

#### *A geometriai fejlesztő program*

A geometriai program heti három órában négy hónapig tartott. A program kidolgozója és a tréning vezetője az első szerző volt. A program a tükrözés (pont, szakasz, síkidom pont és tengely szerinti) a hajtogatás (felület kialakítása), a konstrukció, a lebontás, a forgatás (kúp, henger, gömbfelületek, körbeforgathatóság), a transláció (eltolás; párhuzamosság, arányosság stb.) és a darabolás (terület stb.) fogalmaira terjedt ki. A program lépéseit, az elsajátított fogalmakat, ismereteket és a fejlesztett képesség-területeket a függelékben láthatjuk. (A térsemlélet fejlesztését szolgáló programokról bővebben lásd Séra, Kárpáti és Gyulyás, 2002).

#### *Eljárás*

A program kezdetekor felmértük a geometriai ismeretszintet (egyébként a VI. osztály a síkgeometriai tanulás első éve minimális ismeretekkel). Szintén ekkor került sorra az előteszt felvétele (Rey-teszt és téri tesztek). A fejlesztő program végén került sor az utóteszt alkalmazására (Rey-teszt, geometriai teszt, téri tesztek). A két csoport csak a geometriai fejlesztés tekintetében tért el egymástól.

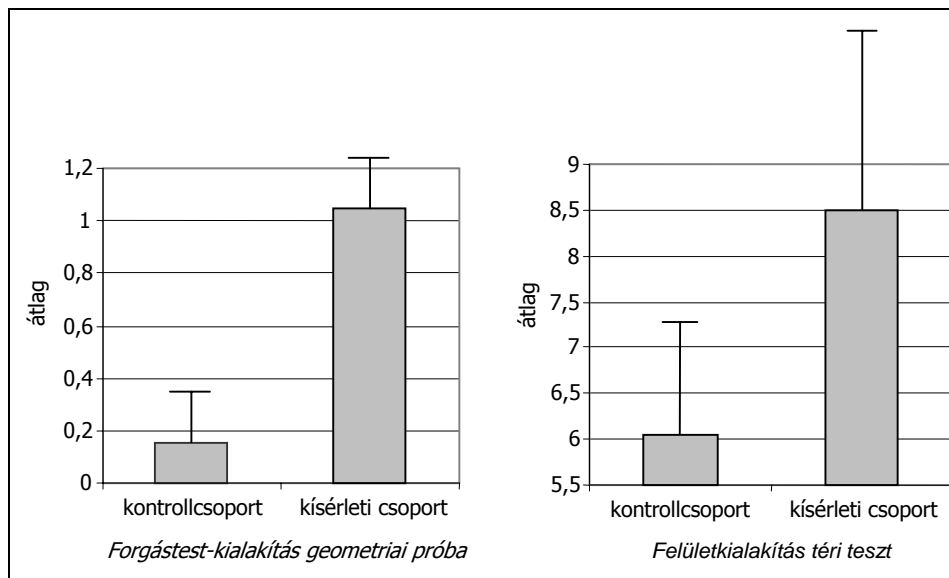
#### *Eredmény és megbeszélés*

A hagyományos és a téri csoport geometriai feladatban nyújtott teljesítményének átlagait és szórásait az 1. táblázat tartalmazza. A csoportok átlagai a téri csoport javára a síkban való forgatási feladatban ( $t(38) = 2,184$ ;  $p < 0,03$ ), a tükrözéses geometriai utótesztben ( $t(38) = 5,784$ ;  $p < 0,01$ ) és a geometriai görbefelület kialakító tesztben ( $t(38) = 3,619$ ;  $p < 0,001$ ) szignifikánsan különböztek. Két területen csak tendencia-szinten mutatkozott különbség, éspedig a translációs feladatban ( $t(38) = 1,89$ ;  $p < 0,06$ ) és a darabolás geometriai tesztben ( $t = 1,857$ ;  $p < 0,07$ ).

1. táblázat. A geometriai tesztek átlagai és szórásai

Feladat	Hagyományos csoport		Kísérleti csoport	
	átlag	szórás	átlag	szórás
Forgatás	3,25	2,14	4,95	2,73***
Tükrözés	5,1	1,53	7,96	1,59**
Felületképzés	0,15	0,36	1,05	1,05***
Transzláció	4,46	2,14	5,87	2,56*

A téri tesztek átlagait és szórásait a hagyományos és a téri csoportnál a 2. táblázat mutatja. A kísérleti csoport téri tesztekben mutatott elő- és utóteszt eredményei szignifikánsan különböztek (Papírhajtogatás teszt:  $t(18) = 7,064$ ;  $p < 0,01$ ; Felületkialakítás teszt:  $t(18) = 6,115$ ;  $p < 0,01$ ; Kártyaforgatás teszt:  $t(18) = 4,853$ ;  $p < 0,01$ ). A hagyományos- és a tréningcsoport átlagai az utótesztben csak a Felületkialakítási téri tesztben különböztek szignifikánsan ( $t(18) = 3,136$ ;  $p < 0,05$ ), a Kártyaforgatás teszt ( $t(18) = 1,436$ ;  $p > 0,1$ ) és a Papírhajtogatás teszt ( $t(18) = 1,048$ ;  $p > 0,1$ ) esetében nem. A 2. ábra a forgástest-kialakító geometriai teszt és a felületkialakítási téri teszt (utóbbi esetben a pozitív válaszok) átlagértékeit mutatja a hagyományos és a téri csoportban. (Meg kell jegyezni, hogy a hagyományos csoportban kapott eredmények is a téri képességek javulására utalnak, ugyanis ez idő alatt ők is, geometriát tanultak.)



2. ábra  
Egy geometriai feladat és egy téri teszt átlagai és szórásai



Az első felvételhez képest mindkét csoportnál javult a vizuális emlékezet pontszáma, de a téri csoportnál ez a javulás kifejezettebb volt. (Rey teszt: elő- és utóteszt átlag és szórás a kísérleti és kontrollcsoportnál sorban: 13,58/3,89; 16,8/4,09 versus 11,65/3,89; 13,75/4,49; kísérleti csoport  $t(19) = 6,97$ ;  $p < 0,001$ .)

2. táblázat. A téri tesztek átlagai és szórásai

Feladat	Hagyományos csoport		Téri csoport		p
	átlag	szórás	átlag	szórás	
Kártyaforgatás	23,7	14,41	30,5	15,72	n.s.
Papírhajtogatás	11,1	4,67	12,44	4,04	n.s.
Felületkialakítás	6,05	2,72	8,5	2,18	< 0,05

Az 1. vizsgálat eredményeit röviden két pontban foglalhatjuk össze:

1) A vizualizáció (tükrözés, forgatás, transzformációs geometria) és a mentális manipuláció (darabolás, felületkialakítás) által elsajátított ismeretek fejlesztik, nagymértékben megnövelik a problémamegoldást.

2) A vizuális-téri képességet igénylő feladatok a téri képességeken belül különösen a vizualizációs faktorra fejtik ki hatásukat, amit a felületkialakításban elért javuló teljesítmények mutatnak.

Az eredmények a kétdimenziós (síklátás) a háromdimenziós (térlátás) térfelfogásra való áttérés folyamatára is utalnak. Ez az áttérés valószínűleg arra ösztönöz, hogy a vizuálisképzeletre támaszkodva különösen a manipulációs műveletek révén próbálják meg a téri ismereteket és a térfogalmakat elsajátítani.

## 2. vizsgálat

Lényegesnek látszik azt is megvizsgálni, hogy az alkalmazott vizualizációs geometriai program hozzájárult-e a geometriai problémamegoldásban fontos metakognitív készségek implicit fejlesztéséhez. Ez a vizsgálat az explicit metakognitív stratégiahasználat hatását vizsgálta, arra a feltételezésre keresve megerősítést, hogy a fejlesztő geometriai program a geometriai ismeretek elsajátításában lehetőséget teremt a kontextuális diverzifikációra, amely impliciten lehetővé teszi metakognitív stratégiák körvonalazódását.

## Módszer

### *Személyek*

A személyek (20 fő) azonosak voltak az 1. vizsgálat fejlesztő programjának résztvevőivel.

### *Eszközök*

Egy transzformációs geometriai tesztet használtunk, amelyben 4. tükrözéses (TUKTRANS) és 3. forgatásos feladat (FORGTRANS) szerepelt.

„Bűvös négyzet” – feladat: háromszor hármás négyzet, a benne lévő számok összege az oszlopok, átlók és sorok mentén ugyanaz. A tükrözéses feladatok a számoknak a függőleges, vízszintes tengelyek mentén való tükrözését kérik, a forgatásos transzferfeladatok pedig a négyzet  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  és  $270^\circ$ -os forgatása által új számkonfiguráció meghatározását tűzik ki célul. Az értékelés a geometriai tesztekhez hasonlóan történt.

### *Eljárás*

A fejlesztő tréningben résztvevők közül teljesítményük alapján az első tíz közé sorolható személyek egy három hetes explicit végrehajtó stratégia-tanulási programban vettek részt. Heti négy órában geometriai feladatok megoldásában gyakorolták a következő 8 stratégia-lépést: (1) olvasd el a feladatot; (2) azonosítsd az ismert adatokat a megfelelő geometriai alakzaton; (3) olvasd el a problémát újra; (4) állapítsd meg, mit kell megtalálnod, kiszámítanod; (5) dolgozz ki egy tervet arra, hogy miként próbálsz eljutni a megoldáshoz a meglévő adatok segítségével; (6) ellenőrizd a tervedet, hogy helyes-e? Ha igen, akkor térj át a következő lépésre, ha nem, menj vissza az 5. lépéshez és dolgozz ki egy másik tervet; (7) hajsd végre a tervedet; (8) ellenőrizd az eredményt.

*Feltevések:* (1) a vizuális tréningben részesülteknél az expliciten tanított kivitelezési stratégia használata nem javítja szignifikánsan a teljesítményt, ugyanis ezt implicit módon sajátították el; (2) a transzformációs geometriai problémamegoldásban az explicit stratégia használat által nem változik meg szignifikánsan a problémamegoldási teljesítmény.

### *Eredmény és megbeszélés*

Az 1. vizsgálat geometriai teszteredményei (GEOMOSZ) és a transzfer-geometriai teszt eredményeinek (GEOTRANS), a tükrözési utóteszt (TUK2) és a tükrözéses transzfereszt (TUKTRANS) eredményeinek, valamint a geometriai forgásteszt (FORG2) és a forgatásos transzfereszt eredményeinek (FORGTRANS) korrelációt a 3. táblázat tartalmazza. A kapott eredmények azt mutatják, hogy a megfelelő tesztpárok ugyanazt mérik.

Az explicit stratégia tanításában részesült tanulók elő- (GEOMOSZ) és utóteszt (GEOTRANS) átlagainak összehasonlítása nem eredményezett szignifikáns különbséget ( $t(9) = 0,598$ ,  $p > 0,1$ ; átlag, szórás;  $7,63/0,68$  vs  $7,74/0,60$ ), vagyis az explicit stratégiahasználat nem javult meghatározóan a problémamegoldási teljesítmény. Hasonlóképpen az expliciten tanított tanulási stratégia felhasználása nem javította a transzformációs geometria (tükrözés, forgatás) feladatmegoldó képességet ( $t(9) = 0,768$ ;  $p > 0,1$ ;  $0,813$ ;  $p > 0,1$ ; átlagok, szórások:  $8,63/0,99$  vs  $8,20/1,98$ ;  $7,40/0,73$  vs  $7,90/2,02$ ).

3. táblázat. A geometriai és a téri tesztek korrelációs táblázata

	<i>FORGTRAN</i>	<i>GEOMOSSZ</i>	<i>GEOTRANS</i>	<i>TUK2</i>	<i>TUKTRANS</i>
<i>FORG2</i>	0,532*	0,751**	0,613**	0,348	0,18
<i>FORGTRAN</i>	—	0,717**	0,778**	0,352	0,620**
<i>GEOMOSSZ</i>		—	0,813**	0,550*	0,631**
<i>GEOTRANS</i>			—	0,547*	0,655**
<i>TUK2</i>				—	0,532*

\*  $P < 0,05$ ; \*\*  $P < 0,01$

A 2. vizsgálat alapján megállapítható, hogy a vizualizációs fejlesztő program alatt a diákok (még a gyengébbek is) impliciten elsajátított stratégiákat használnak mind az ez-úton szerzett ismereteikkel operáló geometriai feladataik, mind a mentális transzformációkat igénylő feladataik megoldásai során.

### Az eredmények értékelése

A vizualizáció és a téri gondolkodás része a téri információk feldolgozását igénylő transzformációs geometriai feladatok megoldásának (*Battista*, 1990; *Boulter és Kirby*, 1994; *Eisenberg és Dreyfus*, 1989). Azonban a téri képességek és matematikai (geometriai) teljesítmények kapcsolata bonyolult és ellentmondásos. Mint a fenti eredmények is mutatják, bizonyos feladatokban, így például szöveges problémák megoldásában, geometriai alakzatok elképzelésére használhatóak a téri képességek, de látszólag hasonló feladatokban, mint amilyen a geometriai bizonyítás, valószínűleg nem segítenek. Valószínű, hogy a téri képességek hatása szelektívnek tekinthető a matematikai (geometriai) teljesítményekre, amely problémák nem téri stratégiákkal is megoldhatók.

Ráadásul a téri információk feldolgozásában különböző vizuális-téri reprezentációs formákra lehet támaszkodni. *Hegarty és Kozhevnikov* (1999) 12 éves fiúknál a matematikai problémamegoldás és téri képességek összefüggését vizsgálva két reprezentációs típust különítettek el: képi és sematikus típust. Az előbbi a tárgyak jellemzőiről, alakjáról, színéről kialakított élénk és részletes vizuális kép kialakítására szolgál, az utóbbi pedig a tárgyak közötti téri kapcsolatok leképezésével és a téri átalakítások elképzelésével kapcsolatos reprezentációs forma. A képi típus pozitívan, a sematikus típus negatívan korrelált a matematikai problémamegoldás sikerességével. Szerintük a téri képesség a képzeleti képességek részének fogható fel, amely inkább sematikus, de nem a vizuális képzelettel állhat kapcsolatban. *Lohman* (1988) szintén magas szintű absztrakt folyamatként határozta meg a téri vizualizációt, a sematikus téri reprezentáció ennek felelhet meg. A vizuális-téri képességek egyéni különbségei, a reprezentáció különböző formái és a stratégiahasználat egyaránt közrejátszhatnak a téri problémamegoldási teljesítményekben.

A vizsgálat alátámaszotta azt a feltételezésünket, hogy a vizualizációs geometriai tréningben résztvevők jobban teljesítenek a geometriai problémamegoldási feladatokban és a téri tesztekben, mint a hagyományos csoport tagjai. A kapott eredmények alapján a fej-

lesztő programról általánosan elmondható, hogy erőteljes hatást gyakorolt a geometriai problémamegoldási képességre, ugyanakkor pozitív hatások voltak észlelhetők a tanulók téri képességeinek, valamint rövid távú vizuális emlékezeti képességeinek fejlődésében is. A tréning vizualizációs jellege révén lehetővé tette a minőségi és mennyiségi aspektus mentén értékelhető síkgeometriai tudás kialakulását, amely a tanulási mód jellegzetességeiből adódó hozzáférhetősége által a problémamegoldási képességre fejtette ki közvetlen hatását. Ez utóbbi a gyerekek sikerélményei révén remélhetőleg a geometriával szembeni negatív attitűdöket is megváltoztatta.

A tükrözés, párhuzamos eltolás, síkbeli forgatás és darabolás képzeleti műveletei a fejlesztett problémamegoldási képességek háttérében meghúzódó síklátás fejlődését segíthetik. A vizuális-téri felületkialakítási képességet és a hasonló geometriai feladatok eredményei arra engednek következtetni, hogy a síklátás maga után vonja a háromdimenziós térszemlélet kialakulását. A vizualizációs tréning hatására javul a téri ingerek kódolása, felidézése és összehasonlítása, így közvetve javul a téri problémamegoldás.

A vizsgálat eredményei alapján megállapítható, hogy a bevezetőben ismertetett eredményekkel összhangban a téri vizualizáció fejleszhetőnek, a gyakorlás hatására javulónak bizonyult.

A vizsgálat eredményei szintén utalnak arra, hogy a változatos kontextuális hatások a metakognitív stratégiák implicit kiválasztódását teszik lehetővé a geometriai problémamegoldásban. A tanított explicit megoldási stratégiahasználat vizsgálatában nem mutatható hatás úgy is értelmezhető, mint a meglévő implicit stratégiákat alátámasztó eredmény, de ez a kérdés további kutatások után lesz megválaszolható.

## Irodalom

- Battista, M. T. (1990): Spatial visualization and gender differences in high school geometry. *Journal of Research in Mathematics Education*, **21**. 47–60.
- Bennett, G. K., Searhore, H. G. és Wesman, A. G. (1974): *Manual for the differential aptitude tests: for S and T* (kiad.). Psychological Corporation, New York.
- Bethel-Fox, C. E. és Shepard, R. N. (1988): Mental rotation: Effects of stimulus complexity and familiarity. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, **14**. 12–23.
- Boulter, D. R. és Kirby, J. R. (1994): Identification of strategies used in solving transformational geometry problems. *Journal of Educational Research*, **87**. 298–303.
- Brinkmann, E. H. (1966): Programmed instruction as a technique for improving spatial visualization. *Journal of Applied Psychology*, **50**. 179–184.
- Chinnappan, M. és Lawson, M. J. (1996): The effects of training in the use of executive strategies in geometry problem solving. *Learning and Instruction*, **6**. 1–17.
- Clark, J. M. és Paivio, A. (1991): Dual coding theory and education. *Educational Psychology Review*, **3**. 149–210.
- Eisenberg, T. és Dreyfus, T. (1989, szerk.): Visualization and mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, **11**. 1–76.
- Ekstrom, R. B., French, J. W., Harman, H. H. és Dermen, D. (1990): *Manual for kit of factor-referenced cognitive tests 1976*. N. J., Educational Testing Service, Princeton.

- Eliot, J. (1987): *Models of psychological space: Psychometric, developmental, and experimental approaches*. Springer, New York.
- Hegarty, M. és Kozhevnikov, M. (1999): Types of visual-spatial representations and mathematical problem solving. *Journal of Educational Psychology*, **91**. 684–689.
- Kirby, J. R. (1990): Spatial cognition in education. *Paper presented at the International Congress of Applied Psychology*, 22–27 July, Kyoto, Japan.
- Kirby, J. R. és Boulter, D. R. (1997): Spatial ability and transformational geometry. *Paper presented at the European Association for Research in Learning and Instruction*, Athens, 26–30 aug. 11.
- Kyllonen, P. C., Lohman, D. L. és Snow, R. E. (1984): Effects of aptitude, strategy training, and task facets on spatial task performance. *Journal of Educational Psychology*, **76**. 130–145.
- Kyllonen, P. C., Lohman, D. L. és Woltz, D. J. (1984): Componential modeling of alternative strategies for performing spatial tasks. *Journal of Educational Psychology*, **76**. 1325–1345.
- Lean, G. A. (1981): *Traning of spatial abilities: a bibliography* (Report No. 8, Mathematics Educational Centre, Papua New Guinea, University of Technology).
- Lohman, D. F. (1988): Spatial abilities as traits, processes and knowledge. In: Sternberg, R. J. (szerk.): *Advances in the psychology of human intelligence*. N. J., Erlbaum, vol. IV, Hillsdale, 181–248.
- Lohman, D. F. és Nichols, P. D. (1990): Training spatial abilities: Effects of practice on rotation and synthesis tasks. *Learning and Individual Differences*, **2**. 67–93.
- Lord, R. R. (1985): Enhancing the visual-spatial aptitude of students. *Journal of Research in Science Teaching*, **22**. 395–405.
- Mayer, R. E. és Sims, V. K. (1994): For whom is a picture worth a thousand words? Extensions of a dual-coding theory of multimedia learning. *Journal of Educational Psychology*, **86**. 389–401.
- McClosky, P. (1979): The facilitation of spatial ability and problem solving in adolescent pupils through learning in design. *Educational Review*, **31**. 259–268.
- McGee, M. G. (1979): Human spatial abilities: Psychometric studies and environmental, genetic hormonal and neurological influences. *Psychological Bulletin*, **86**. 889–918.
- Olson, D. R. és Bialystok, E. (1986): *Spatial cognition*. NJ., Erlbaum, Hillsdale.
- Paivio, A. (1991): Dual coding theory: Retrospect and current status. *Canadian Journal of Psychology*, **45**. 255–287.
- Séra László, Kárpáti Andrea és Gulyás János (2002): *A térszemlélet - A vizuális-téri képességek pszichológiája, fejlesztése és mérése*. Comenius Bt, Pécs.
- Schoenfeld, A. (1985): *Mathematical problem solving*. Academic Press, London.
- Stericker, A. és LeVesconte, S. (1982): Effect of brief training on sex-related differences in visual-spatial skill. *Journal of Personality and Social Psychology*, **43**. 1018–1029.
- Sternberg, R. J. és Ben-Zeev, T. (2001): *Complex cognition: The psychology of human thought* Oxford University Press, New York-Oxford.
- Vandenberg, S. G. (1975): Sources of variance in performance of spatial tests. In: Eliot, J. és Salkind, N. J. (szerk.): *Childrens's spatial development*. Ill., Thomas, Springfield, 57–66.

Salat Annamária-Enikő és Séra László

## ABSTRACT

### ANNAMÁRIA-ENIKŐ SALAT AND LÁSZLÓ SÉRA: ENHANCING SPATIAL VISUALIZATION THROUGH THE USE OF TRANSFORMATIONAL GEOMETRY TASKS

This study reports the results of a background study on an experimental geometry program aiming the development of visual-spatial abilities. Subjects were 12- and 13- year -old pupils in the 6<sup>th</sup> grade. The spatial group (n=20) participated in a 4 month 3 lessons/week program, while the control group (n=20) had traditional geometry lessons (Experiment 1). The program targeted concepts related to reflection (of a point, a line segment or a figure; in a point or a line), iteration (creating surfaces), construction, decomposition, rotation (cone, cylinder, spherical surfaces, full rotation), translation (shifting; paralellism, proportionality, etc.), sectioning (area, etc.). At the end of the transformational geometry (visualization) program, differences were found between the performance of the two groups on geometry tests and especially regarding the visual factor of the Surface Creation Test. The present paper also discusses issues concerning teaching for explicit executive strategies in solving geometry tasks (the steps of problem comprehension, locating useful information, planning, execution, monitoring; Experiment 2.)

Magyar Pedagógia, **102**. Number 3. 459–473. (2002)

Levelezési cím / Address for correspondence:

Salat Annamária-Enikő, Babeš-Bolyai Tudományegyetem Pszichológia Kar, Kolozsvár.  
Séra László, ELTE Pszichológiai Intézete, Budapest.

**Függelék**  
A geometriai fejlesztőprogram lépései

Program lépések síkban (2 D)	Elsajátított		Fejlesztett képesség területek
	Fogalmak	Ismeretek	
<b>Tükrözés</b> <u>Pont szerinti</u> Pontnak Szakasznak Síkidomnak <u>Tengely szerinti</u> Pontnak Szakasznak Síkidomnak	– kollinearitás – csúcshögek – párhuzamosság – váltóshögek – középpontos szimmetrikusság – középpontosan szimmetrikus síkidomok – pont távolsága egyenestől – merőlegesség – párhuzamosság – tengelyes szimmetrikusság – tengelyesen szimmetrikus síkidomok	– csúcshögek kongruenciája – shögek kongruenciája – paralelogramma – shögek összeadása – shögek kivonása – háromshögek kongruenciája – rombusz – egyenlő szárú háromshög magassága – téglalap – négyzet – szabályos hatsög – egyenlő oldalú háromshög – egyenlő szárú trapéz	– vizuális (képzelti) képességek (vizuálizáció) – mentális tükrözés – vizuális memória – geometriai problémamegoldás
<b>Transzláció (eltolás)</b>	– párhuzamosság – arányosság – hasonlóság	– négyshögek újraszerkesztése – kongruens és hasonló háromshögek	– vizuális képzelti kép. – mentális transzláció
<b>Rotáció (forgatás)</b>	– körbeirhatóság	– a kör sajátosságai – körbe írt síkidomok – kerületi shög – középponti sz.	– vizuális képzelti képesség (vizuálizáció forgatási képesség) – vizuális memória – problémamegoldás
<b>Darabolás</b>	– terület: – négyzet – téglalap – háromshög – rombusz – trapéz	– területkialakítások – Pytagorász tételének előkészítése	– vizuális képzelti manipuláció – vizuális memória – problémamegoldás
2 D	2 D → 3 D		
<b>Hajtogatás (felületkialakítás)</b> Konstrukció 2D → 3D Lebontás 3D → 2D	– párhuzamosság a térben – merőlegesség a térben – testek felszíne – lapsög	Hasábok sajátosságai oldalfelszín teljes felszín kocka téglatest paralelepipedon lapsögök egyenes és sík shögek	– vizuális téri képességek → vizuálizáció → térszemlélet (mentális rekonstrukció) – vizuális memória – problémamegoldás
<b>Rotáció (forgatás)</b> 2 D → 3 D	– görbelapú felületek	Kúp sajátosságai Henger sajátosságai Csonkakúp sajátosságai	– téri - vizuális képesség (vizuálizáció) – mentális forgatás (térszemlélet) – vizuális memória – vizuális problémamegoldás