MAGYAR PEDAGÓGIA
108. évf. 1. szám 5–27. (2008)

A RACIONÁLIS SZÁMOK MEGÉRTÉSE

Terezinha Nunes
Department of Education, University of Oxford

Nem sok dolog van, amelyben a matematika-tanárok egyetértenek. Véleményük azonban valószínű egyezik abban, hogy a tanulók a racionális számokat nehéznek tartják (pl.: *Behr, Lesh, Post* és *Silver*, 1983; *Brousseau, Brousseau* és *Warfield*, 2004; *Kerslake*, 1986; *Kieren*, 1988; *Ohlsson*, 1988; *Pitkethly* és *Hunting*, 1996; *Stafylidou* és *Vosniadou*, 2004). A kutatók számos tévképzetet fogalmaztak már meg, fejlesztőprogramok széles skáláját dolgozták ki a racionális számokkal kapcsolatban, tanításuk és tanulásuk ennek ellenére továbbra is csüggesztő feladat mind a tanárok, mind a tanulók számára. Ez a téma kiemelt fontosságú helyen áll a matematikatanításban, amit az USA Nemzeti Matematika Testület (*U.S.A. National Mathematics Panel*) legfrissebb jelentése is alátámaszt, mivel ismeretük alapot szolgáltat a további matematikatanulás, különösen az algebra tanulása számára (*Fennell* és mtsai, 2008).

Jelen tanulmány abból a definícióból indul ki, hogy a racionális számok a hányadosok tartományába tartozó számok (*Brousseau*, *Brousseau* és *Warfield*, 2007; *Kieren*, 1993; *Ohlsson*, 1988), különböző alkonstruktumai, illetve jelentései léteznek (lásd pl.: *Behr*, *Harel*, *Post* és *Lesh*, 1992; *Kieren*, 1988). Ebből következően a tanulmányban bemutatott kutatás során a gyerekek racionális szám felfogásának alapját az osztás megértésében kerestük. Hipotézisünk szerint az osztási feladatokban – a törtek megfelelő szóbeli vagy írásbeli reprezentációja nélkül is – a gyerekek mind a mennyiségek ekvivalenciájába, mind sorrendjébe belátást nyerhetnek.

Tanulmányunk első fejezetében azonosítunk két, osztási feladatokban alkalmazott cselekvési sémát, valamint a racionális számok vonatkozásában feltárjuk az egyes sémák által előidézett belátást. A második és harmadik fejezetekben a két cselekvési sémára vonatkozó fejlesztési kutatásokat tekintjük át. Az utolsó fejezet pedig összefoglalja az oktatási gyakorlat számára fontos következtetéseket és implikációkat.

Az osztás kétféle cselekvési sémája

A matematikatanítás szakirodalma hagyományosan az osztás két fajtáját különbözteti meg: a felosztó (*partitive*) és a szétosztó (*quotative*) osztást. *Fischbein*, *Deri*, *Nello* és *Marino* (1985. 7. o.) definíciója szerint a felosztó osztás – amit megosztó (*sharing*) osztásnak is neveznek – „egy tárgy vagy tárgyak összességének számos egyenlő részre vagy csoportra töténő felosztása, ahol az osztandó nagyobb, mint az osztó; az osztó (*operator*) egész szám; a hányados kisebb az osztandónál (*operand*) […] A szétosztó osztás vagy mérték-osztás esetén azt kell meghatározni, hogy egy adott mennyiség hányszor van meg egy nálánál nagyobb mennyiségben. Ez esetben az egyetlen feltétel, hogy az osztandó nagyobb legyen az osztónál. Amennyiben a hányados egész szám, a modell tekinthető ismétlődő kivonásnak is.”

Ez a rendszerezés két, azonos cselekvési sémára építő módot különböztet meg, amelyet itt felosztásnak (*partitioning*) fogunk nevezni. Az osztási problémák *Fischbein*, *Deri*, *Nello* és *Marino* (1985) által azonosított mindkét fajtájára igaz, hogy (1) van benne egész (egy tárgy vagy tárgyak csoportja), amit egyenlő részekre kell osztani; (2) az osztandó nagyobb az osztónál; valamint (3) a gyerekeknek egyenlő részeket kell kialakítani, amelyek együttesen maradéktalanul kiteszik az egészet. Az osztási problémák két fajtájának különbsége abban áll, hogy míg a felosztó osztásnál az adott, hogy hány részt kell kapni, addig a szétosztó osztásnál a részek mérete ismert és arra kell rájönni, hány ilyen méretű rész illik az egészbe.

Amikor a gyerekek a felosztás sémáját használják, mennyiségekkel kapcsolatos belátásaik segíthetnek megérteniük néhány alapelvet, amelyek a racionális számok tartományán értelmezhetőek. Gondolkodhatnak például úgy, hogy minél többfelé vágják az egészet, annál kisebbek lesznek a részek. Ez a meglátás releváns a törtek által reprezentált mennyiségek esetén is, és segíthet a gyerekeknek megérteni, hogyan rendeződnek a tört számok.

Amennyiben a gyerekek magasabb szinten tudnak már gondolkodni a felosztásról, érthetővé válik számukra a törtek ekvivalenciája, azaz képesek lesznek megérteni például, hogy, ha valamihez képest kétszer annyi részük van, a kétszer annyi rész fele akkora, mint az eredeti anyagmennyiség. Például, ugyanannyi csokoládét eszünk, ha egy tábla csokit kétfelé törünk és megesszük az egyik darabot, mint ha négyfelé törtünk és kettő darabot eszünk meg, mivel a részek száma és mérete kiegyenlíti egymást.

Empirikus kutatási kérdés, hogy vajon a gyerekek az egész számok területén eljutnak-e ezek megértéséhez és azután kiterjesztik-e ismereteiket a racionális számokra.

Jóllehet a törtek bevezetése során a felosztás sémáját alkalmazzák leggyakrabban a tanárok, nem ez az egyetlen cselekvési séma, amely releváns lehet az osztás tanítása során. A gyerekek használják még a megfeleltetés sémáját (*correspondence*) is, ahol mind az osztandót, mind az osztót egy-egy mérték jeleníti meg. A két típusú osztás közötti küldönbség abban rejlik, hogy a felosztásnál egyetlen egész (vagy mérték) jelenik meg, a megfeleltetéses osztásnál viszont két különböző mértékkel kell dolgozni. A megegyezésre egy jó példa, amikor a gyerekek csokoládé szeleteket osztanak szét egymás között. Ebben az esetben az osztandó – a csokiszeletek száma – egyféle mérték, míg az osztó – a gyerekek száma – egy másik mérték. Ez esetben, éppen a mértékek kétféleségének köszönhetően, kiküszöbölhetők az osztó és az osztandó relatív méretével kapcsolatos feltevések, amelyeket *Fischbein*, *Deri*, *Nello* és *Marino* (1985) azonosítottak: az osztandónak nem kell nagyobbnak lennie az osztónál. A legtöbb gyerek egyetért abban, hogy akár egyetlen darab csokoládét is el lehet osztani három gyerek között, azaz lehetséges egy kisebb számot egy nagyobb számmal osztani.

A két cselekvési séma közti különbség első pillantásra megfoghatatlannak tűnhet, illetve a törtek megértésével foglalkozó kutatások sem alapozták meg teljesen e különbségtételt. Ennek ellenére amellett érvelünk, hogy mind a cselekvési sémák által előidézett eltérő belátás, mind az empirikus kutatási eredmények között jelentős a különbség.

Legalább négyféle eltérés adódik aközött, amit a gyerekek a törtek által reprezentált mennyiségekről tanulhatnak, ha a felosztás sémáját, vagy a megfeleltetés sémáját használják. Az első lehetséges különbség abból adódik, hogy a gyerekek kétféle mértéket állítanak fel, ezért a megfeleltetés esetén nincs szükségszerű kapcsolat az osztandó és az osztó mérete között. Ezzel szemben, amint *Fischbein*, *Deri*, *Nello* és *Marino* (1985) rámutatnak, a felosztási sémában az osztandónak nagyobbnak kell lennie az osztónál. Ebből következően a megfeleltetést használva a gyerekek könnyebben juthatnak el az áltörtek megértéséhez, mint amikor egyetlen egészet osztanak fel. Valószínűleg nem jelent számukra problémát annak megértése, hogy ha három csokoládét osztunk el két gyerek között, mindkét gyerek egy egészet és egy felet kaphat. Ezzel szemben, a felosztás alkalmazásakor belezavarodhatnak, hogy valaki megevett három részt egy kétfelé osztott csokoládéból.

Egy második lehetséges különbség, ha a gyerekek rájönnek arra, hogy nem számít a felosztás menete, amíg „igazságos” a két mérték közötti megfelelés. Gondolkozhatnak például úgy, hogy ha három csokit kell elosztani két gyerek között, nem szükséges először mindhármat kettéosztani, majd a kapott fél szeleteket szétosztani, mivel ugyanilyen igazságosan osztjuk el a csokit, ha mindkét gyereknek adunk egy-egy egész csokit és csak a harmadikat felezzük el közöttük. Ez egy lényeges belátás a törtek megértése szempontjából. A természetes számok tartományában egy három elemet tartalmazó halmaz ekvivalens minden háromelemű halmazzal, és csak a három elemet tartalmazó halmazokkal. A racionális számok tartományában két különböző szám által leírt mennyiség is lehet ekvivalens (pl. 1/2, 2/4, 3/6 stb. ekvivalensek, bár különböző szám írja le őket).

Egy harmadik lehetséges mennyiségekre vonatkozó ismeret, amelyet a megfeleltetésből nyerhetünk, a mennyiségek sorba rendezésével kapcsolatos: a gyerekek megérthetik, hogy minél többen osztoznak a csokin, egyenként annál kevesebbet kapnak belőle. Az osztás kontextusában ezt úgy lehetne leírni mint az osztó és a hányados közötti fordított arányosság ismeretét. Korábban feltételezték, hogy a gyerekek ugyanilyen belátásra jutnak a felosztási séma használatával. Van azonban egy lényeges különbség a kétféle sémából levezethető következtetések között: a felosztás esetében egy mennyiségen belüli relációt kell létrehozni (minél több rész, annál kisebbek), míg a megfeleltetés esetében mennyiségek közötti viszonyt kell felállítani (minél több gyerek, annál kevesebb csoki). Az empirikus kutatás feladata annak a kérdésnek a megválaszolása, hogy egyforma nehéz-e eljutni mindkét belátáshoz, vagy az egyik könnyebb-e a diákoknak, ha igen, melyik az.

Végül, mind a felosztás, mind a megfeleltetés bizonyos mértékben elősegítheti a mennyiségek közötti ekvivalencia megértésének kialakulását, de a megértéshez vezető gondolkodásmód különböző a kétféle cselekvési séma esetében. Ha csokiszeleteket hozunk összefüggésbe a gyerekek számával, gondolhatják, hogy ha kétszer ennyi csoki lenne és kétszer ennyi gyerek, a részesedésük ugyanakkora lenne, annak ellenére, hogy megváltozott mind az osztó, mind az osztandó. Ez egyszerűbb, mint a felosztáshoz szükséges összehasonlító gondolkodás. A felosztás esetében az ekvivalencia fordított arányosságon (ha valamit kétszer annyi részre darabolunk, akkor minden egyes rész mérete fele akkora lesz), míg megfeleltetésnél egyenes arányosságon (ha kétszer annyi csokoládém van kétszer annyi gyerek részére, akkor nem változik az eredetileg kapott csokoládé mennyisége) alapul.

Az ekvivalencia fogalmának és a törtek sorrendjének osztási szituációkban való megértésére vonatkozó feltáró elemzés azt jelzi, hogy érdemes az eddiginél több figyelmet szentelni az osztási sémák (felosztás és megfeleltetés) különbözőségének. Az ekvivalencia és a mennyiségek sorbarendezésének kérdését tekintve valószínűsíthető, hogy a megfeleltetés sémája zökkenőmentesebb átmenetet biztosít a természetes számok és a racionális számok tartománya között.

A tanulmány második és harmadik részében áttekintem a gyerekek felosztással és megfeleltetéssel kapcsolatos felfogásait. Kiterjedt szakirodalom áll rendelkezésre az említett cselekvési sémákról, tanulmányomban azonban azokra a kutatásokra szeretnék összpontosítani, amelyek megvilágítják, hogy lehetséges-e a természetes számok, illetve a racionális számok által reprezentált mennyiségek megértése között folytonosságról beszélni. Az egyszerűség kedvéért az utóbbit nevezzük „tört mennyiségeknek".

A gyerekek megfeleltetési séma használata mennyiségek meghatározása esetén

Piaget (1952) kutatása úttörő volt annak a kérdésnek a tárgyalásában, hogy a mennyiségekre vonatkozó következtetések meghozatala során hogyan és mikor használják a gyerekek a megfeleltetési sémát. Számos, a gyerekek megfelelés-megértésével foglalkozó kutatása között a fent említett kutatásban először arra kérte a gyerekeket, hogy tegyenek egy-egy rózsaszínű virágot az asztalon lévő vázák egy csoportjába. Miután kivetette a vázákból a rózsaszínű virágokat, arra kérte a gyerekeket, hogy tegyenek egy-egy kék virágot ugyanazokba a vázákba, amelyekbe korábban a rózsaszín virágokat tették. Ezek után összeszedette és félretetette az összes virágot, a vázákat viszont az asztalon hagyta és megkérte a gyerekeket, hogy éppen annyi szívószálat vegyenek ki egy dobozból, amennyi ahhoz szükséges, hogy mindegyik virágot bele tudjunk tenni egy-egy szívószálba. Az 5-6 éves gyerekek számolás nélkül, megfeleltetéssel következtetni tudtak a virágok és a szívószálak számának ekvivalenciájára: két szívószálat feleltettek meg egy vázának. Ezzel az eljárással ekvivalens halmazokat kaptak. *Piaget* azt a következtetést vonta le, hogy a gyerekek ítéletei „multiplikatív ekvivalenciákon" alapultak (1952. 219. o.), amelyeket a megfeleltetési séma használata alakított ki: a gyerekek úgy gondolkodtak, hogy ha kettő az egyhez megfelelés van a virágok és a vázák száma között, valamint szintén kettő az egyhez megfelelés a szívószálak és a vázák száma között, akkor a szívószálak és a virágok számának azonosnak kell lennie.

Piaget csak arányosságot, osztást nem tartalmazó szituációban használta a megfeleltetés sémáját. *Frydman* és *Bryant* (1988) vizsgálatsorozata ezzel szemben osztási feladatok segítségével vizsgálta a halmazok megfeleltetését. Kutatásukban a gyerekek kaptak egy csomag kockát, azaz „játékédességet", amelyet egyenlően kellett szétosztaniuk különböző játékbabák között. A négy éves gyerekek hatékonyan és igazságosan vitték ezt véghez az „egyet neked – egyet nekem" típusú eljárás segítségével. Az „édesség" szétosztása után a gyerekek biztosak voltak benne, hogy igazságosan jártak el és mindkét babának ugyanannyi „édesség" jutott. Ezek után *Frydman* és *Bryant* megkérték a gyerekeket, hogy számolják meg az egyik babának adott „édességeket", majd ebből következtessenek a másik baba „édességeinek" számára. A négy évesek körülbelül 40%-a tudta azt a következtetést meghozni, hogy a másik babának ugyanannyi „édessége" van, mint az elsőnek. A sikeresen következtetők aránya az életkorral párhuzamosan növekedett. Ez az eredmény kiterjeszti *Piaget* az irányú megfigyeléseit, melyek szerint megfeleltetés segítségével nem csak szorzási, de osztási problémák esetében is képesek a gyerekek ekvivalencia ítéleteket hozni.

A fent említett kutatási eredmények azt mutatják, hogy a gyerekek a természetes számok tartományában az ekvivalencia eldöntése során akkor is tudják használni a megfeleltetés sémáját, ha nem számolják meg a halmazok elemeit, azaz nem használnak közvetítőként számokat. Az eredményeket *Davis* és mtsai számos esetben reprodukálták (*Davis* és *Hunting*, 1990; *Davis* és *Pepper*, 1992; *Pitkethly* és *Hunting*, 1996), publikációikban erre a sémara „elosztásként" (*dealing*) utalnak. A szerzők ezt a sémát alapvető fontosságúnak tartják a törtek megértése során (*Davis* és *Pepper*, 1992). Számos egyenlőséget vizsgáló helyzetben – például az újraelosztást egy új csoporttag érkezésekor – tanulmányozták a megfeleltetés használatát. Az újraelosztási szituációkban az elosztás végrehajtása után több gyerek döntött az újraszámolás mellett, így voltak csak biztosak abban, hogy mindenkinek egyforma mennyiség jutott (*Davis* és *Pitkethly*, 1990). Mindazonáltal a kutatók arra a következtetésre jutottak, hogy a gyerekek az elosztás során a mennyiségek ekvivalenciájának megteremtésére felhasználják a megfeleltetést.

Correa, *Nunes* és *Bryant* (1998) kiterjesztették a vizsgálatokat. Eredményeik arra utalnak, hogy a gyerekek nem csak azonos osztók esetében tudják az új mennyiséget meghatározni, hanem akkor is, ha az osztók különbözőek. Annak érdekében, hogy a tévesztés kiküszöbölése miatt a gyerekek ne számolják meg osztás után a halmazok elemeit. *Correa*, *Nunes* és *Bryant* (1998) nem kérték a gyerekektől, hogy végezzék el az elosztást: miután a gyerekek meggyőződhettek róla, hogy a kiosztandó édesség-mennyiségek megegyeznek, az édességet a kísérletvezető osztotta szét, ráadásul a gyerekek látóterén kívül.

A vizsgálatban kétféle osztási módot alkalmaztak: azonos osztandó és azonos osztó, valamint azonos osztandó és különböző osztók. Az előbbi szituációban a gyerekeknek a halmazok ekvivalenciájára kellett következtetniük, az utóbbi esetben pedig arra, hogy minél többen részesülnek az édességből, annál kevesebbet kapnak belőle fejenként.

Amikor az osztandó és az osztó azonos nagyságú volt, az ötévesek kétharmada, a hatévesek többsége és az összes hétéves is arra a következtetésre jutott, hogy mindenki egyenlő mennyiséget kapott. A fordtott arányosságnál egyszerűbb volt az osztló és a hányados közötti ekvivalencia megállapítása: korosztályonként 34, 53 és 81% volt azon gyerekek aránya, akik arra jutottak, hogy minél többen kapnak az édességből, annál kevesebbet kap belőle egy fő. *Correa* egy korábbi kutatása során szintén arra a következtetésre jutott, hogy az édesség babák segítségével történő szétosztása fejlesztette a gyerekek az ehhez hasonló feladatok megoldásában. A megfelelés létrehozásáról való gondolkodás fejleszti az osztás során létrejövő mennyiségek relációinak megállapítását.

Az eddig említett kutatások mindegyikében az osztandó diszkrét mennyiségből állt és nagyobb volt az osztónál. Felmerül azonban a kérdés, hogy vajon a gyerekek képesek-e hasonló ekvivalencia ítéleteket hozni, amikor egyrészről folytonos mennyiség is szerepel a feladatban, másrészről az osztandó kisebb az osztónál, azaz, törtekről kell gondolkodniuk.

Kornilaki és *Nunes* (2005) két különböző szituációban hasonlították össze a gyerekek ítéleteit: (1) diszkrét mennyiségek szerepeltek a feladatban és az osztandó nagyobb volt az osztónál, (2) folytonos mennyiségeket tartalmazott a feladat és az osztandó kisebb volt az osztónál. Az első típusú feladatban adott számú játékhalat kellett a gyerekeknek először egy csoport fehér macska, majd egy csoport barna macska között igazságosan szétosztaniuk. A halak száma mindkét esetben nagyobb volt, mint a macskáké. A második típusú feladatban pedig hal-tortákat (osztandó) kellett igazságosan szétosztani a macskák között, a torták száma viszont mindig kisebb volt a macskák számánál. A torták száma 1-3 között változott, míg a macskák száma 2 és 9 között. *Correa*, *Nunes* és *Bryant* (1998) által felállított elveket követve, a gyerekeknek valójában nem kellett szétosztaniuk a halakat, sem felosztani a tortákat. Azt kérdezték tőlük egy igazságos elosztást követően, hogy az egyik csoportban minden fehér macska ugyanannyi élelmet kapott-e, mint a másik csoportban a barna macskák. *Empson*, *Junk*, *Dominguez* és *Turner* (2005) hangsúlyozzák, hogy „az egyenlő részek, például hetedek, megállapítása egy rész-egész reprezentációban nem szükségszerű lépés az 1/7 tört megértéséhez (ellentétes nézetet lásd: *Charles* és *Nason*, 2000; *Lamon*, 1996; *Pothier* és *Sawada*, 1983). Elengedhetetlen azonban annak megértése, hogy az 1/7 az a mennyiség, amelyet úgy kapunk, hogy az 1-et 7 egyenlő nagyságú részre osztjuk". Néhány esetben megegyezett a halak (osztandó) és a macskák száma (osztó), más esetekben változatlan osztandó mellett megváltozott az osztó. Az első típusú szétosztásos feladatokban a gyerekeket az ekvivalenciáról kérdezték, a második típusú feladatok esetében pedig arra kérték a gyerekeket, hogy rendezzék sorba az osztás után kapott mennyiségeket. Tizenhat próbát végeztek diszkrét mennyiségekkel és huszonnégyet folytonos mennyiségekkel. A próbák nagy száma lehetővé tette annak megállapítását, hogy a gyerekek a találgatásnál jobban teljesítettek-e.

A gyerekek többsége sikeres volt az olyan itemek esetében, ahol az osztandó és az osztó megegyezett: az ötévesek 62%-a, a hatévesek 84%-a és valamennyi hétéves helyesen válaszolta meg az adott kérdést. Amikor az osztandó azonos volt, az osztó viszont különböző, a helyes válaszok aránya 31, 50 és 81% volt a három korcsoportban. A diszkrét és folytonos mennyiségek különbözősége nem befolyásolta a sikeres feladatmegoldók arányát.

A legtöbb item esetében a gyerekek az osztó és az osztandó közötti reláció fajtájának megjelölésével magyarázták válaszaikat: ha ugyanakkora az osztó, akkor nem változik a rész nagysága, vagy – különböző osztók esetén – minél több macska részesül a tortákból, annál kisebbek lesznek a szétosztott részek. A diszkrét mennyiségeket tartalmazó feladatok megoldásának indoklása során számokat a hétévesek 6%-a használt, a fiatalabbak még ritkábban. Folytonos mennyiségeket tartalmazó feladatok megoldása során a részarányok megnevezésekor a hétévesek 3%-a használt számokat. A magyarázatok elemzése alátámasztja azt az elképzelést, mely szerint a gyerekek mind az egyenlőségek meghatározásakor, mind az osztás után kapott mennyiségek sorbarendezésekor számolás helyett ekvivalenciarelációkban gondolkodnak. A gyerekek egyenlőség-ítéletek meghozatalakor használni tudják a megfeleltetést, sőt tört mennyiségek sorbarendezésekor is sikeresen használják azt, még abban az esetben is, ha nem tanultak korábban törtekkel számolni. A megfeleltetés sikeres alkalmazása független volt attól, hogy az osztás egész számot eredményezett-e, vagy az osztandó nagyobb volt, mint egy és az eredmény nem egész szám volt (pl. két torta felosztása 3, 4 vagy 5 macska között).

A kisiskolás gyerekek legnagyobb részének nehézségei vannak, amikor folytonos mennyiségeket kell egyenlő részekre osztani (lásd pl.: *Hierbert* és *Tonnessen*, 1978; *Hunting* és *Sharpley*, 1988a, 1988b; *Miller*, 1984; *Piaget*, *Inhelder* és *Szeminska*, 1960). *Kornilaki* és *Nunes* (2005) szerint a gyerekek következtetési képességei fejlettebbek procedurális osztási készségeiknél. Ez a fejlettség valószínűleg a diszkrét mennyiségekből álló osztandó és osztó közötti viszony ismeretéből származik.

Újabban *Mamede* (2008) reprodukálta a fenti eredményeket, aki tört mennyiségeket és aszimmetrikus relációkat tartalmazó feladatokat adott a gyerekeknek, akiknek azt a felosztási séma segtségével kellett megoldani. *Mamede* portugál első évfolyamos gyerekekkel dolgozott, akik iskolai keretek között még nem tanultak törtekről. Teljesítményük alig volt gyengébb az angol gyerekekénél: a hatévesek 55 és a hétévesek 71%-a volt képes meghozni azt a következtetést, hogy minél nagyobb az osztó, annál kisebb részt kap minden részesülő az egészből.

A fent említett kutatási eredmények azt sugallják, hogy a gyerekek felosztásból származó tapasztalataikból kiindulva képesek felismerni és megtanulni az osztó és az osztandó egymáshoz való lehetséges viszonyait. Ebből adódóan, ha a gyerekek megfeleltetéseket használnak a mennyiségek viszonyainak megértésére, lehetséges a viszonylagosan zökkenőmentes átmenet a természetes számok és a racionális számok között. Ez az érv központi jelentőségű *Streefland* (1987, 1993, 1997) számára, aki több kutatóval együtt (*Davis* és *Pepper*, 1992; *Kieren*, 1993; *Vergnaud*, 1997) azt a kérdést vizsgálja, hogy mi lehet a legideálisabb kezdeti pontja a törtek tanításának.

A tanulmányok bíztató eredményeket mutatnak arra vonatkozólag, hogy a gyerekek olyan esetekben is képesek megérteni az osztás logikáját, amikor az osztandó kisebb az osztónál. Van azonban egy további probléma a természetes számok és a racionális számok közötti átmenet során. A racionális számok tartományában végtelen sok ekvivalens tört van (pl.: 1/2=2/4=3/6 stb.), az eddig ismertetett munkákban pedig a gyerekeknek csak olyan esetekben kellett megállapítani az ekvivalenciát, amikor az osztó és az osztandó egyenlő volt. Felmerül a kérdés, vajon képesek lehetnek-e megállapítani az ekvivalenciát akkor is, amikor az osztó és az osztandó különböző, az osztó/osztandó arány azonban ugyanaz.

Nunes és mtsai (2008) 7 és 10 év közötti, negyedikes és ötödikes angol gyerekeket kértek meg, hogy hasonlítsák össze a részeket olyan szétosztási helyzetekben, amelyekben az osztók és az osztandók különbözők voltak, arányuk viszont azonos maradt. A korábbi kutatások (lásd pl.: *Behr, Harel, Post* és *Lesh*, 1992; *Kerslake*, 1986) azt mutatják, hogy az ilyen korú gyerekeknek nehézséget okoz a törtek ekvivalenciája. A vizsgálatban résztvevő gyerekek már tanultak valamit a törtekről: felosztási feladatokban találkoztak már féllel és negyedekkel, de még csak egyetlen ekvivalencia párt ismertek: egy fél megegyezik két negyeddel. A kutatás során a gyerekeknek két képet mutattak: az egyiken négy lány osztott fel egymás között igazságosan egy pitét, a másikon nyolc fiú tette ugyanazt két pitével. A piték mérete, formája azonos volt a két képen. A feladatban a gyerekeknek azt kellett eldöntemi, vajon minden fiú és minden lány ugyanannyi pitét kap-e. Összesen a diákok 73%-a (78% a negyedik évfolyamosoknál és 70% az ötödikeseknél, a különbség nem szignifikáns) válaszolt helyesen a kérdésre.

Az eddig áttekintett kutatásokban osztásból származó mennyiségek viszonyának meghatározására kérték a gyerekeket úgy, hogy a feladatok csak két mértéktartományt tartalmaztak. A feladatok megoldása során a gyerekeknek nem kellett leírni számmal (törttel) a kapott mennyiségeket.

Nunes és mtsai (2008) egy rövid tanítási kísérletet végeztek a törtek tanítására. Megtanították a gyerekeket arra, hogyan írják le a törteket két mértéktartomány (elosztott mennyiségek és a belőlük részesülők arányának) függvényében, majd a kapott törtek egyenlőségére kérdeztek rá. Elemezték az ekvivalencia igazolására adott érveket és összevetették azzal a belátással, amelyet a megfeleltetési séma használata révén az elosztási kontextusban kifejlődni gondoltak. A kutatás során ez a rövid tanítási kísérlet nagyban hozzájárult a folyamatok megértéséhez, mivel egy meghatározott típusú vezérfonal felhasználásával bepillantást nyerhettek a gyerekekben konstruálódó megértési folyamatokba. A gyerekek iskolában töltött idejük nagy részét töltik azzal, hogy a felnőttekkel történő interakció során (*Cooney*, *Grouws* és *Jones*, 1988; *Steffe* és *Tzur*, 1994; *Tzur*, 1999; *Yackel*, *Cobb, Wood*, *Wheatley* és *Merkel*, 1990) megpróbálják felhasználni a tanultakat. A vizsgálat csupán összefoglaló formájában érhető el (*Nunes*, *Bryant*, *Pretzlik* és *Hurry*, 2006), ezért a kutatás néhány részletére az alábbiakban kitérünk.

A kísérletben résztvevő gyerekek (N=62) hét és tíz év közöttiek voltak, negyedik, illetve ötödik évfolyamon tanultak. Az előző vizsgálatban szereplőkhöz hasonlóan a vizsgálatot megelőzően csupán fél és negyed törtekről, valamint azok ekvivalenciájáról tanultak. Az osztálytermen kívül egy-egy kutatóval kis csoportokban dolgoztak (12 csoport 4-6 fő közötti létszámmal, osztálylétszámtól függően). Először egyénileg kellett az összes problémát megoldaniuk, majd válaszaikat csoportmunka keretében vitatták meg. A beszélgetésekről hang- és képfelvétel készült. A gyerekek érveit szóról szóra lejegyeztettük, a video szalagok információit pedig később a leiratokkal együtt használtuk fel a gyerekek érveinek jobb megértése céljából.

A vizsgálatban *Streefland* (1993) feladatait használtuk. A gyerekek két felosztási feladatot oldottak meg a tanítási vizsgálat első, egy ekvivalencia feladatot pedig a második napján. Képes füzetek tartalmazták a feladatokat. Az első napon használt feladatok a következők voltak:

(1) Hat lány egy csomag kekszet akar elosztani. A csomag zárva, nem tudjuk, hány keksz van a csomagban.
   a) Hány keksz volt a csomagban, ha minden lány egyet kapott és egy sem maradt?
   b) Hány keksz volt a csomagban, ha minden lány egy felet kapott és egy sem maradt?
   c) Mi történik a kekszek szétosztásakor, ha néhány további lány csatlakozik hozzájuk? Ekkor a lányok egyenként több vagy kevesebb kekszet kapnak, mint a hat lány eredetileg?

(2) Négy gyerek három csokoládét akar elosztani.
   a) Kaphat-e mindenki egy egész csokit?
   b) Kaphat-e mindenki legalább egy fél csokit?

c) Te hogyan osztanád el a csokoládékat? (A füzet tartalmazott egy képet három csokoládéról és négy gyerekről és a gyerekeknek itt kellett megmutatniuk, hogyan osztanák el őket.) Írd le, mekkora részt kaphat egy gyerek!

Miután befejezték a fenti feladatokat, a kísérletvezető azt mondta a gyerekeknek, hogy a törtek leírását fogják gyakorolni, amit még nem tanultak az iskolában. A gyerekeket megkértük, hogy írják le a „felet" numerikus jelekkel, ezt már ismerték. A kísérletvezető azután megkérdezte, miért van egyes a vonal fölött, kettes pedig alatta, és miért van a vonal a számok között (a gyerekek értelmezéseiről lásd: *Charles* és *Nason*, 2000; *Empson*, *Junk*, *Dominguez* és *Turner*, 2005). A kísérlevezető a válaszokból kiindulva elvezette a gyerekek annak felismeréséhez, hogy az adott törtjel értelmezhető „egy csoki két gyerek közötti elosztása"-ként, és hogy a vonal jelöli az osztást. Ezután megkérdeztük a gyerekeket: ha egy csokoládét kell négy gyerek között elosztani, milyen törtet kapunk? Ez számukra már ismert jelölés volt, de azt akartuk, hogy a gyerekek újraértelmezzék azt „egy osztva néggyel"-ként, és ne csak úgy gondoljanak a jelre, mint „egy rész a négyből", ahogyan eredetileg értelmezték a felosztás kontextusában kapott oktatás alapján. Ezután kép felhasználása nélkül a kísérletvezető arra kérte a gyerekeket, írják le, mekkora részt kapnának a csokoládéból, ha

(1) egy csokoládét osztana el három gyerek;
(2) egy csokoládét osztana el öt gyerek;
(3) két csokoládét osztana el öt gyerek.

A második napon bemutatott ekvivalencia feladat a következő volt:

Hat gyerek elment egy pizzériába és rendelt két pizzát. El akarták osztani maguk között. A pincér kihozott egyet és azt mondta, nekiláthatnak, mert időbe telik, míg ki tudja hozni a másodikat is.

a) Mennyit kap minden gyerek az első pizzából, amelyet a pincér kihozott? Írd le azt törtet, ami ezt kifejezi!
b) Mennyit kapnak fejenként a második pizzából? Írd le a választ!
c) Ha összeadod a két részt, mennyit kap egy gyerek összesen? Írhatsz „+" jelet az első és a második tört közé, és írd a végére, mennyit kap egy gyerek összesen!
d) Ha a két pizza egyszerre érkezik, hogyan oszthatják el másképpen?
e) Ekvivalensek-e ezek a törtek (a „c" és „d" kérdésre adott válaszok)?

Az előző részben kifejtett hipotézisenknek megfelelően azt vártuk, a gyerekek nyernek valamiféle belátást a racionális számok használatába azáltal, hogy különböző módokat keresnek ugyanazon mennyiség felosztására. Azt vártuk, hogy megértik a következőket: 1) lehetséges kisebb számot nagyobbal elosztani; 2) különböző törtek is jelölhetik ugyanazt a mennyiséget; 3) kétszeres felosztandó mennyiség elosztása kétszeres számú részesülő egyén között az eredeti eredménnyel megegyező mennyiségeket eredményez; és 4) minél nagyobb az osztó, annál kisebb a hányados. Ez utóbbi gondolat nem tárható fel az ekvivalens törtek problémájának kontextusában.

A gyerekek arra vonatkozó magyarázatai, hogy miért gondolták a törteket ekvivalensnek vagy miért nem, bizonyítékot szolgáltattak mindhárom előzetesen elvárt belátás kialakulására, sőt ennél többre is, amint azt alább részletezzük.

Lehetséges kisebb számot nagyobbal elosztani

A tanulóknak nem okozott nehézséget egy pizzát felosztani hat gyerek között. Az a) és b) kérdésben felvetett ekvivalencia-problémára reflektálva, mindenki legalább egy törtet helyesen írt le (néhány gyerek több törtet is írt válaszként ugyanerre a kérdésre, mindig helyesen).

A c) és d) pontban felvetett kérdésre reflektálva, amikor a gyerekeket arról kérdeztük, hogyan osztanák el a két pizzát, ha azok egyidőben érkeznek, és milyen tört írná ezt le, néhány gyerek 1/3 arányt adott meg mindkét pizzára, mások mások 2/12-et pizzánként, összesen tehát 4/12-et adva. Az utóbbi csoport ahelyett, hogy egy pizzát három lány között osztott volna el, úgy döntött, tizenkét részre vágja a pizzákat, azaz megfelezték a hatodokat. A felfogások ilyen különbsége már önmagában különböző beszélgetéshez vezetett, még mielőtt a kísérletvezető valójában felvetette a kérdést az ekvivalenciával és a különböző törtekkel kapcsolatban.

Különböző törtek is kifejezhetik ugyanazt a mennyiséget

Ezt a belátást minden csoport megemlítette. Egy gyerek például a következőt mondta, „Ugyanannyian vannak az emberek, ugyanannyi a pizza, ugyanakkora lesz a tört is, mindegy, hogyan vágjuk”. Egy másik azt mondta, „Mivel nem nagyon számít mikor osztják szét, ők megkapják ezt [három lány az első pizzát], ők pedig azt [három lány a másodikat], és ugyanannyi lesz”. Egy harmadik gyerek szerint: „Ugyanannyi a pizza. Különböző törtek lehetnek, de ugyanaz a mennyiség [ez a gyerek 4/12-et ajánlott 2/6-od alternatívájaként]”. Ismét más szerint: „Hát, csak magában az idő nem sokat számít, a lényeg a dolgok száma”.

Kétszeres osztandó és kétszeres osztó ekvivalens mennyiségeket ad

Ezt az elvet a tizenkét csoportból tizenegy említette meg. Például egy gyerek azt mondta: „Ez a lányok fele és a pizzák fele; három fele a hatnak és egy a kettőnek”. Másik így érvelt: „Ha két pizzájuk van, akkor az elsőt odaadhatják három lánynak, a másodikat pedig a másik három lánynak. (…) Ha mindenki egy részt kap minkét pizzából, mindenki ugyanannyit kap”.

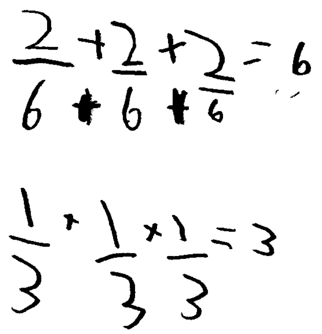
Mindhárom elgondolás megfogalmazódott a gyerekekben. Két másik problémát is kifejtettek azonban, amelyek megjelenésére nem számítottunk ebben a megfeleltetési problémában.

A részek száma és a részek mérete fordítottan arányos

Ezt az elvet a tizenkét csoportból nyolc fogalmazta meg. Például egy gyerek, aki tizenkét részre vágta a pizzákat, a következőt mondta: „Mivel ez annak [a szeletek számának] a duplája, és ez annak [az egy személyre jutó adagnak] a duplája, kétszer vágják félbe és mindegyik fele méretű lesz; ugyanakkorák lesznek”. Más szerint: „Mivel egyhatod és egyhatod valójában más törtek [az egyharmadhoz képest] és megfeleződtek [a szeletek], hogy kisebbek legyenek és a felezés [a szeletek számáé] nagyobbá teszi [a szeletek méretét], ezért elfeleztem és egyharmad lett”.

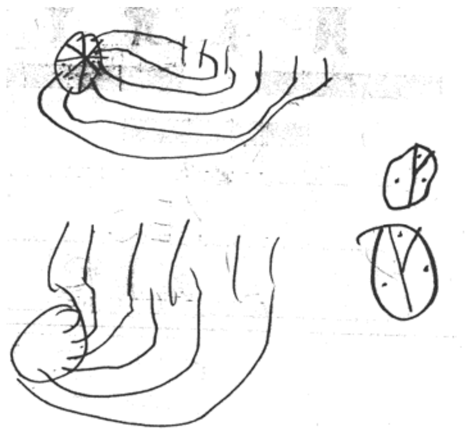
A törtek ugyanazt a rész-egész viszonyt mutatják

Ez a gondolat, amelynek kifejeződésére nem számítottunk a megfeleltetési sémában, egy csoport esetében merült fel, eredetileg egyetlen gyereknél, de később újra spontán megfogalmazódott egy másik gyerekben is. Az első azt mondta: „Három két hatod kell ahhoz, hogy hat legyen [hat szeletet mutat egy pizzán bejelölve], és három egy harmad kell ahhoz, hogy három legyen (három szeletet mutat egy pizzán bejelölve). [Ezután leírta az 1. ábrán látható számítást és azt mondta:] Van két hatod, hozzá kell adni két hatodokat háromszor, hogy hat hatod legyen. Egy harmaddal háromszor egy harmadot kell hozzáadni, hogy három harmad legyen”. Figyeljük meg, hogy nem a 6/6-od vagy a 3/3-ot írja le, azokat csupán szóban fejezi ki. Nem a gondolkodása, hanem a megjelölése a hibás. Úgy tűnik, semmi kétsége sincs a felől, hogy 6/6 és 3/3 ekvivalens egészek: érvelése ezt feltételezi.



1. ábra
Egy gyerek írásbeli teljesítménye
(háromszor 2/6 egyenlő 6 és háromszor 1/3 egyenlő 3)

Ez a rövid tanítási kísérlet azzal a céllal folyt, hogy olyan helyzetekben kapjunk információt a gyerekek beszélgetéseiből, amelyekben a megfeleltetés osztási sémáját használhatták. A problémák első csoportja, amelyben diszkrét mennyiségeket kellett szétosztaniuk, megteremtette a hátteret a gyerekek számára a cselekvési séma használatához. Ezután segítettük őket az írott törtek meghatározott értelmezésének kialakításában, amely szerint a számláló az osztandó, a nevező az osztó, a vonal pedig az osztás műveletét jelöli. Ez az értelmezés nem helyettesítette eredeti elképzelésüket, mely szerint az osztás bizonyos számú rész elvétele az egészből, ehelyett a két értelmezés együtt élt bennük, és mindkettő megjelent érveikben válaszaik indoklásakor. A következő problémákban, amelyekben az elosztandó mennyiség folytonos volt, az osztandó pedig kisebb volt az osztónál, a gyerekek lehetőséget kaptak, hogy felfedezzék a folytonos mennyiségek elosztásának különböző módjait. Nem kértük őket, hogy valójában osszák el a pizzákat, így néhányan jelölték papíron az elosztást, mások nem. A 2. ábra bemutat egy példa rajzot, amely tartalmaz néhány lehetséges felosztást: a gyerek rajzának legfeltűnőbb tulajdonsága a megfeleltetés használata. A pizzák harmadokra osztásánál a pizzán belüli pontok a belőle részesülőket képviselték. A megfeleltetés sémája meghatározó szerepet játszott a gyerekek gondolkodásában. Néhány esetben a megfeleltetéseket mentálisan kivitelezték és verbálisan fejezték ki, más esetekben a megfeleltetés szemléltetésére rajzokat és gesztikulációt használtak.



2. ábra
Egy gyerek rajza, amely a 2/6 és az 1/3 ekvivalenciáját szemlélteti

Más kutatók is utaltak már arra, hogy a gyerekek törteket tartalmazó problémák megoldása során használják a megfeleltetés módszerét. *Empson* (1999) a következő problémát adta fel 6-7 éves gyerekeknek (első évfolyamosok az USA-ban): négy gyerek szeretne elosztani három palacsintát. Hány palacsinta kell ahhoz, hogy ha tizenkét gyerek osztozik rajtuk és mindenki ugyanannyi palacsintát kapjon, mint a három gyerek a négy palacsintából? Megfigyelései szerint három gyerek a felosztás használatával oldotta meg a feladatot, három pedig megfeleltette a három palacsintát a négyfős csoportnak. Hasonló stratégiákról számolt be egy másik probléma kapcsán is, amelyben két csokiszeletet kellett három gyerek között elosztaniuk.

Kieren (1993) szintén megfeleltetések használatát figyelte meg, miközben a gyerekeknek egymással nem ekvivalens törteket kellett összehasonlítani. Hét gyerekre jutott négy elosztandó tárgy az A csoportban, és négy gyerekre két elosztandó tárgy a B-ben. A gyerekeket arról kérdezte, mennyit kapna mindenki az egyes csoportokban, valamint hogy a két csoport tagjai ugyanakkora mennyiséget kapnának-e. *Kieren* bemutat egy nyolc éves gyerektől származó rajzot, amelyen a tárgyakat felosztotta felekre, és az így kapott felek és a részesülők között megfeleltetést használt. Az A csoportban egy részesülő nélküli vonal azt mutatja, hogy volt egy „extra fél” és a gyerek amellett érvelt, hogy ahhoz, hogy a két csoportban az egy főre jutó mennyiségek megegyezzenek, még egy fő hiányzik az A csoportból. *Kieren* ezt a gondolkodást „megfeleltető vagy ‘arányszerű’ gondolkodásnak” nevezi (54. o.).

Konklúzió

A gyerekek a következőkre tudják használni a megfeleltetés sémáját:
- halmazok közötti ekvivalencia megállapítására, amelyek azonosan aránylanak egy referencia-halmazhoz (*Piaget*, 1952);
- dolgok újraelosztására;
- osztásból származó ekvivalenciák indoklásához, függetlenül attól, hogy az osztó kisebb, vagy nagyobb az osztandónál (*Empson*, 1999; *Nunes* és mtsai, 2008);
- tört mennyiségek sorba rendezésére (*Kieren*, 1993; *Kornilaki* és *Nunes*, 2005).

Az említett vizsgálatok mindegyike tíz éves kor alatti gyerekekkel készült és pozitív eredményeket mutatott. Ez ellentétben áll a gyerekek osztási nehézségeit leíró szakirodalommal és azt a kérdést veti fel, hogy a nehézségek talán a gyerekek felosztáson alapuló cselekvési sémájából, illetve az ezzel összefüggő tört-képzetükből adódnak (lásd *Lamon*, 1996; *Streefland*, 1987). A tanulmány további részében a gyerekek felosztási sémájának fejlődését és az azon alapuló tört-képzetet elemezzük.

A gyerekek felosztási sémája és a mennyiségekkel kapcsolatos ítélethozatal

A felosztás sémáját, amelyet neveznek még részekre osztásnak (*subdivision*) és feldarabolásnak (*dissection*) is (*Pothier* és *Sawada*, 1983), kövekezetesen egy egész részekre osztásaként definiáljuk. A folyamatot nem egy adott dolog részekre vágásaként értelmezzük, amint teszik azt hagyományosan, hanem egy kezdettől irányított folyamatként azzal a céllal, hogy előre meghatározott számú egyenlő részt kapjunk.

Piaget, *Inhelder* és *Szeminska* (1960) úttörő vizsgálatot végeztek a felosztás és a törtek kapcsolatáról. Számos olyan belátást fogalmaztak meg, amelyeket szükségesnek véltek annak eléréséhez, hogy a gyerekek eljuthassanak a törtek megértésére, és ezeket vizsgálták felosztási feladatokkal. A motivációt maga a torta jelentette, amelyet fel kellett osztani megadott számú gyerek között. Úgy gondolták, hogy „a tört képzete két alapvető relációtól függ: a rész egészhez fűződő viszonyától (…) és a rész részekhez fűződő viszonyától” (309. o.). *Piaget*, *Inhelder* és *Szeminska* (1960) számos tényt azonosítottak, amelyek belátása nélkül a gyerekek nem értik meg a törteket:
1) feloszthatónak kell tekinteni az egészet. Erre a gyerekek kb. két éves korukig nem képesek;
2) a létrejövő részek száma kezdettől fogva meghatározott;
3) a részek összességének meg kell egyezni az egésszel (azaz nem lehet második köre az osztásnak és nem lehet maradék);
4) a vágások száma és a létrejövő részek száma összefügg egymással (pl.: ha két részre akarunk valamit osztani, ahhoz egy vágást kell ejtenünk);
5) minden résznek azonosnak kell lennie;
6) minden rész önmagában egésznek tekintendő, amelyek beágyazódnak az egészbe, de további felosztások alapját is képezhetik;

7) az egész változatlan marad és megegyezik a részek összegével.

Piaget, Inhelder és *Szeminska* (1960) megfigyelték, hogy a gyerekek ritkán voltak képesek helyes felosztásra hat éves koruk előtt. A fő stratégia a sikeres felosztás kivitelezésére egymást követő kettéosztások használata volt, így a gyerekek hamarabb tudtak négyfelé osztani valamit, mint harmadolni. Az egymást követő felezések segítettek a gyerekeknek bizonyos törtek megértésében, egyszerűbb például így nyolcadokra osztani valamit. Azonban ez más törtek megértésekor zavart okozott: néhány gyerek ötödölés helyett hatodokra volt csak képes osztani, először elfelezve az egészet, majd minden részt háromfelé osztva.

Piaget, *Inhelder* és *Szeminska* (1960) azt is vizsgálták, a gyerekek megértik-e a törtek fogalmának hetedik kritériumát, azaz az egész megmaradását. Ez a belátás, érvelésük szerint, azt feltételezi, hogy a gyerekek megértsék, a részeket nem lehet csupán részeknek tekinteni, meg kell érteniük kapcsolatukat az egésszel is. Néhány gyerek ezt nem értette meg és amellett próbált érvelni, hogy ha valaki megeszik egy 1/2+2/4 részre vágott tortát, másvalaki pedig egy 4/4 részre vágott tortát, a második többet eszik, mert ő négy részt evett, az első pedig csak hármat. Annak ellenére fenntartották ezt az állításukat, hogy felismerték, ha az egyes részeket összetesszük, mindkét esetben egy egész tortát kapunk. Végül, azt is megfigyelték, hogy a gyerekeknek nem kell eljutniuk a felosztás sémájának legfejlettebb szintű alkalmazásáig ahhoz, hogy megértsék az egész megmaradását.

A gyerekek nehézségeinek meglétét a folytonos egészek egyenlő részekre osztásában sok esetben megerősítették olyan gyerekekkel végzett kísérletek, akik az iskoláztatás előtt álltak vagy első évüket töltötték az iskolában [pl.: *Hiebert* és *Tonnessen* (1978), illetve *Hunting* és *Sharpley* (1988b) megfigyelték, hogy a gyerekek nem látják előre a vágások számát és nem is osztják fel az egészet maradéktalanul]. Ezek a vizsgálatok további információval szolgáltak a gyerekek felosztással kapcsolatos tudásával kapcsolatban. *Pothier* és *Sawada* (1983) valamint *Lamon* (1996) részletesebb sémát javasoltak a felosztási séma fejlődésének elemzésére, más kutatók (*Hiebert* és *Tonnessen*, 1978; *Hunting* és *Sharpley*, 1988a; *Miller*, 1984; *Novillis*, 1976) pedig rámutattak, hogy a diszkrét és folytonos mennyiségek felosztásának nehézségei nem azonosak, amint azt *Piaget* feltételezte. A gyerekek olyan eljárást használhatnak a diszkrét mennyiségek felosztására, amely nem alkalmazható folytonos mennyiségek esetén: „kioszthatják” a diszkrét mennyiségeket, a folytonosakat ezzel szemben nem. Ezért szignifikánsan jobban teljesítettek az előbbi, mint az utóbbi típusú feladatokban. A megfeleltetési séma esetében megfigyelt zökkenőmentes átmenet a kétféle típusú mennyiségek között nem volt reprodukálható a felosztási séma használatával.

A tanulmányban érintett kutatások a racionális számok terén a megfeleltetési séma használatát helyezik előtérbe a felosztás használatával szemben. A hivatkozott vizsgálatok azonban a felosztás sémájára *per se* összpontosítottak, az itt felvetett kérdés pedig az, hogy képes-e a felosztás elősegíteni az ekvivalencia és a törtek sorbarendezésének megértését, amint azt jelen tanulmány első részében feltételeztük.

Számos kutatásban vizsgálták már a törtek ekvivalenciájának megértését felosztási kontextusban (pl. *Behr, Lesh, Post* és *Silver*, 1983; *Behr, Wachsmuth, Postm* és *Lesh*, 1984; *Larson*, 1980; *Kerslake*, 1986), a felhasznált módszerek különbözősége azonban szinte lehetetlenné teszi a felosztási és a megfeleltetési sémát vizsgáló tanulmányok összevetését. Ha a tanulmányok a mennyiségek problémája helyett a törtek reprezentációjának leírásával kezdődnek, nem lehet őket összehasonlítani az előző részben taglalt tanulmányokkal, amelyek arra kérték a gyerekeket, hogy mennyiségekről gondolkozzanak, nem szükségszerűen használva tört számokat. Ezért itt csak a korábban bemutatott megfeleltetés-vizsgálatokban alkalmazott módszerekhez hasonló felépítésű tanulmányokat tartjuk érdemesnek a részletesebb elemzésre.

Kamii és *Clark* (1995) egybevágó téglalapokat adtak gyerekeknek, amiket különböző vágásokkal osztottak fel. Például egy téglalapot hosszában, míg egy másikat keresztben vágtak ketté. A gyerekeknek lehetőségük volt belátni, hogy a téglalapok azonos méretűek voltak és a két-két fél mérete is megegyező. Azt kérdezték a gyerekektől, hogy, ha a téglalapok csokoládétorták lennének és a kutatók megennének egy olyan szeletet, amelyet az első téglalapból vágtak, a feladatot végző gyerek pedig megenne egy részt a másodikból, ugyanannyit ennének-e. Ez a módszer könnyen összevethető *Kornilaki* és *Nunes* (2005) kutatásaiban használt módszerekkel. Ott a gyerekeknek nem kellett kivitelezniük a felosztást, így azzal kapcsolatos nehézségeik nem befolyásolták ítéleteiket. Hasonlóan motivált kontextusokat is használnak, azonos kérdésre kifuttatva, mely szerint ugyanannyit ehetnének-e a résztvevők. A *Kamii* és *Clark* (1995) által feltett kérdések azonban a gyerekek felosztással kapcsolatos elképzelését vizsgálják, valamint a két egész részeinek viszonyát, mivel mindkét egész egy-egy emberhez kapcsolódik.

Kamii kutatásában résztvevő gyerekek lényegesen idősebbek voltak, mint a megfeleltetés-vizsgálatokban résztvevő gyerekek: az iskola ötödik-hatodik évfolyamán tanultak (kb. 11-12 évesek). A tanulók mindkét csoportja tanult már a törtek ekvivalenciájáról. Az előzetes oktatás ellenére a gyerekek sikeressége elég alacsony volt: az ötödikesek közül mindössze 44%, a hatodikosok közül pedig 51% érvelt amellett, hogy ugyanannyi csokoládét ennének, mert csak egyforma méretű részek álltak rendelkezésre. *Kamii* és *Clark* mutattak a gyerekeknek két azonos méretű részt, az egyiket negyedekre osztva egy hosszanti és egy keresztirányú vágással, a másikat pedig nyolcadokra osztva csak hosszanti vágások segítségével. Elvettek egy negyedet az első „csokitortából", 3/4-et meghagyva „elfogyasztásra", ezután megkérték a gyerekeket, hogy vegyenek el maguknak ugyanennyit a másik tortából, amely nyolcfelé volt osztva. A jó megoldások aránya ezúttal még alacsonyabb volt: az ötödikesek 13%-a, a hatodikosoknak pedig 32%-a azonosította helyesen a 3/4-et kitevő nyolcadok számát.

A törtek ismeretének vizsgálata közben *Nunes* és *Bryant* (2004) felekkel kapcsolatban hasonló kérdést tett fel angol gyerekeknek. A kutatásban szereplő gyerekek negyedikesek és ötödikesek voltak. A gyerekeknek képeket mutattak, amelyeken egy lány és egy fiú, valamint két egybevágó téglalap szerepelt, „csokitorta"-ként. A fiú keresztben, a lány pedig hosszában felezte meg a maga „tortáját". A gyerekeket arra kértük, mondják meg ugyanakkora részt ettek-e meg a „tortából", és ha nem, melyik gyerek evett többet. Eredményeink pozitívabbak voltak *Kamii* és *Clark* eredményeinél: a negyedikesek 55%-a és az ötödikesek 80%-a helyesen válaszolt. Azonban ezek az eredmények is gyengének számítanak azzal összevetve, milyen a helyes válasz aránya, ha a probléma a gyerekek megfeleltetés-megértésére vonatkozik. *Kornaliki* és *Nunes* (2005) vizsgálatában a hétévesek (harmadikosok) 100%-a felismerte, hogy azonos osztó és azonos osztandó azonos részeket eredményez.

Mamede (2008) közvetlenül összehasonlította a gyerekek megfeleltetési és felosztási séma használatát ekvivalencia és sorbarendezési problémák megoldásában, tört mennyiségeknél. Ebben a jól kontrollált vizsgálatban gyerekekről és csokoládékról szóló történetbe ágyazott problémákat használt, hasonló képeket és matematikailag azonos kérdéseket, a szituációban használt osztási séma volt az egyetlen változó, amely megkülönböztette a problémákat. A megfeleltetési problémákban például azt mondta a gyerekeknek: „Ezen a zsúron három lány akar elosztani igazságosan egy csokitortát, ezen a másik zsúron pedig hat fiú akar igazságosan elosztani két csokitortát”. A gyerekeknek azt kellett megmondaniuk, hogy a fiúk egyenként több tortát esznek-e, mint a lányok, illetve, hogy a lányok esznek-e többet, vagy mindenki ugyanannyit eszik. A felosztási problémában azt mondta: „Ennek a lánynak és ennek a fiúnak ugyanolyan (egybevágó) csokitortája van, mind a kettő túl nagy ahhoz, hogy egyszerre megegyék, ezért a lány felvágja a tortáját három egyenlő részre és egyet megeszik, a fiú pedig hat egyenlő részre vágja a tortáját és kettőt eszik meg”. A kérdés az volt, vajon a lány és a fiú egyenlő mennyiségű tortát evett-e, vagy az egyik többet evett a másiknál. A gyerekek (6-7 évesek) portugál elsősök voltak, előzőleg nem kaptak semmilyen oktatást a tör számokkal kapcsolatban.

A megfeleltetési kérdésekre a hatévesek 35, a hétévesek 49%-a válaszolt helyesen. A felosztási kérdésekre mindkét korcsoport 10%-a adott helyes választ. Ezek a szignifikáns különbségek azt mutatják, a megfeleltetési gondolkodás használata elősegíti a gyerekek tört-ekvivalencia megértését, míg a felosztás nem tesz lehetővé ilyen belátást.

Végül lényegesnek tartjuk összehasonlítani az ekvivalenciára és a törtek által reprezeltált mennyiségek sorrendére vonatkozó tanulói érveket. A szakirodalomban számos tanítási vizsgálat található, amelyek a tanulók törtekkel kapcsolatos belátásait a felosztás segítségével próbálják fejleszteni (pl.: *Behr*, *Wachsmuth*, *Post* és *Lesh*, 1984; *Brousseau*, *Brousseau* és *Warfield*, 2004, 2007; *Empson*, 1999; *Kerslake*, 1986; *Olive* és *Steffe*, 2002; *Olive* és *Vomvoridi*, 2006; *Saenz-Ludlow*, 1994; *Steffe*, 2002). Ezek legtöbbjében a tanulók osztási nehézségeit előre felosztott anyagok használatával (pl.: *Behr*, *Wachsmuth*, *Post* és *Lesh*, 1984) vagy számítástechnikai eszközök alkalmazásával küszöbölik ki, ahol a tanuló utasításainak megfelelően a számítógép végzi az osztást (pl.: *Olive* és *Steffe*, 2002; *Olive* és *Vomvoridi*, 2006).

Több tanulmány összekapcsolja a felosztást a megfeleltetéssel. Azért, mert a kutatók nem tesznek különbséget a két séma között (pl.: *Saenz-Ludlow*, 1994), vagy, mert olyan jellegű tanítási gyakorlatot szeretnének megalapozni, ami egy hatékonyabb fejlesztő programban egyesíti a két sémát (pl.: *Brousseau*, *Brousseau* és *Warfield*, 2004, 2007).

A tanulók érveit vizsgáló két kutatás a tanítást a felosztásra összpontosítja. *Behr*, *Wachsmuth*, *Post* és *Lesh* (1984) különböző típusú manipulatívát használtak, ugyanakkor megtanították a tanulóknak, hogyan használjanak algoritmusokat (az arány kifejezhető a nevező és a számláló elosztásával) a törtek ekvivalenciájának ellenőrzésére. Részletesen elemezték a gyerekek törtek sorbarendezésekor adott érveit. Összefoglalva a következő belátásokról számolnak be a tanítást követően:

– Amikor azonos számlálójú törteket rendeznek sorba különböző nevezőkkel, úgy tűnik, a tanulók képesek amellett érvelni, hogy fordított arányosság van a részek száma és mérete között. Ez az érv vagy explicit utalást tartalmaz a számlálóra („mindegyikben két rész van, de a kétötöd részei kisebbek” 328. o.), vagy impliciten utal rá („minél nagyobb a szám, annál kisebbek a kapott részek” 328. o.).
– Két tört összehasonlításakor egy harmadik szolgálhat referenciapontként: háromkilenced kevesebb, mint háromhatod, mert „háromkilenced (…) kisebb, mint fél, háromhatod pedig éppen egy fél” (328. o.). Nem ismert, hogy a tanulók tanulták-e, hogy 3/6 és 1/2 ekvivalensek, de fel tudják használni ezt az ismeretet egy másik összevetés megoldására.
– A tanulók használták a tanult arányossági algoritmust annak vizsgálatára, ekvivalensek-e az adott törtek: 3/5 és 6/8 nem ekvivalens, mert „ha egyenlőek lennének, a három megvan egészszer a hatban, de az öt nincs meg egészszer a nyolcban”. (331. o.)
– A tanulók megtanulták használni a manipulatív anyagokat annak érdekében, hogy szemléleti összehasonlításokat tegyenek: 6/8 és 3/4 egyenlő, mert „négy résszel kezdtem. Ezután egyáltalán nem kellett változtatnom a papír méretén. Csak félbehajtottam, és nyolcat kaptam”. (331. o.)

Behr, *Wachsmuth*, *Post* és *Lesh* (1984) arról számolnak be, hogy 18 hét tanítás után a tanulók nagy hányada (27%) továbbra is használt a szemléleti összevetésekben manipulatív eszközöket; ugyanilyen arányban (27%) használtak egy harmadik törtet referenciapontként és hasonló arányban (23%) használták azt az arányossági algoritmust, amelyet két tört összehasonlítására tanítottak nekik.

Végül, nincsen arra bizonyíték, hogy a tanulók megértették, hogy a részek száma és mérete pontosan arányosan kompenzálhatja egymást. Például 6/8 és 3/4 összehasonlításakor a tanulók érvelhettek volna úgy is, hogy kétszer annyi részre bomlik az egész, ha nyolcfelé vágjuk, mint ha négyfelé, ezért kétszer annyit (6) kell venni ezekből a részekből ahhoz, hogy ugyanazt a mennyiséget kapjuk.

Végeredményben úgy tűnik, a tanulók valamennyire belátták az osztó és a mennyiség fordított arányosságát, ez azonban csak akkor segítette őket, ha az osztandó nem változott. Nem voltak képesek kiterjeszteni ezt a megértésüket más szituációkra, amelyekben a számláló és a nevező is eltérő volt.

A tanulmányok második csoportja *Steffe* és *munkatársai* vizsgálataihoz kötődik (*Olive* és *Steffe*, 2002; *Olive* és *Vomvoridi*, 2006; *Steffe*, 2002). A tanítás célja nagyrészt az volt, hogy segítse a gyerekeket a törtek numerikus kifejezésében vagy olyan törtek létrehozásában, amelyek jele adott volt, nem lehetséges beszámolójukból a gyerekek törtek ekvivalenciájára vonatkozó érveit kiszűrni.

Mindemellett egy alább részletezett protokol (*Olive* és *Steffe*, 2002) bizonyítékokat ad arra vonatkozóan, hogy az áltörtek nehézségeket okoznak a tanulóknak. A nehézségek származhatnak a tanulók tört-fogalmának alapjául szolgáló felosztási séma használatából. A kísérletvezető megkérte Joe-t, hogy készítsen egy 6/5 hosszú rudat 1/5-nyi darabokból. Joe azt mondta, hogy nem tud, mert összesen öt van belőlük. Némi ösztönzés után Joe hozzáad még egy ötödöt a már felhasznált öthöz, de nem nyilvánvaló, hogy a fizikai cselekedet meggyőzte arról, hogy a 6/5 matematikailag helyénvaló. Egy következő példában Joe 9/7-ként jelöl meg egy kilenc darabból álló rudat, amely darabokat egyhetednek nevezték, de a kutatók szerint megmarad „egyfajta figyelemreméltó bizonytalanság”. Joe később nyolcat számol össze az egyhetednek nevezett darabokból, de nem nevezi „nyolcheted”-nek. Amikor a kutató felajánlja ezt a megnevezést, ő megkérdőjelezi: „Hogyan lehet NYOLC heted?” (*Olive* és *Steffe*, 2002. 426. o.). Később visszautasítja egy 10/7 hosszúságú rúd megkonstruálását annak ellenére, hogy fizikailag minden feltétel adott. Ezt követően másnap Joe reakciója egy áltörtre a következő: „Még mindig nem értem, hogy tudják megcsinálni. *Hogyan lehet egy tört nagyobb, mint önmaga?*” (*Olive* és *Steffe*, 2002. 428. o.).

Amikor azt a problémát mutatják be, amelyben pizzákat kell emberek között szétosztani, a kutató szerint Joe belátja, hogy az áltörtek elfogadhatóak. Amikor tizenkét barát rendel egyenként két szelet pizzát nyolc szeletre felvágott pizzák esetében, Joe azonnal felismerte, hogy egy pizzánál többre lesz szükség. A hagyományos felosztási szituáció, amelyben egy egészet osztunk egyenlő részekre, átalakul egy kevésbé megszokott helyzetté, amelyben két egész szerepel, a részek nagysága viszont meghatározott.

Ez a példa illusztrálja, hogy a tanulóknak ugyan nehézségei vannak az áltörtekkel felosztási kontextusban, azonban ezen felül tudnak kerekedni, ha egynél több egészben gondolkodnak.

Konklúzió

A felosztás, egy egész előre meghatározott számú egyenlő részre osztásaként definiálva, lassabb fejlődési folyamatot mutat a megfeleltetésnél. Ahhoz, hogy a gyerekek sikeresek legyenek, előre kell látniuk a megoldást, hogy a megfelelő számú vágási folyamattal megfelelő számú egyenlő részt kapjanak, amelyek maradéktalanul kiteszik az egészet. Ennek elérése azonban, úgy tűnik, nem hoz létre azonnali belátást az ekvivalencia fogalmába és a tört mennyiségek sorbarendezésébe. Láthatólag sok gyerek nem tartja szükségszerűnek, hogy két egybevágó egészből képzett felek ekvivalensek legyenek, még akkor sem, ha korábban már tanultak a törtek ekvivalenciájáról.

Annak érdekében, hogy ezt a sémát a törtek tanulásának alapjául lehessen felhasználni, a tanítási sémák és a kutatók „elővágott” egészekre vagy számítástechnikai eszközökre hagyatkoznak, hogy kiküszöböljék a pontos felosztással járó nehézségeket. A tanulók a felosztási séma segítségével belátást nyerhetnek a részek száma és mérete közötti fordított arányosságba, de nem áll rendelkezésünkre bizonyíték a felől, hogy megértik, ha kétszer több részre vágunk egy egészet, mindegyik rész fele akkora méretű lesz. Végül, az áltörtek megzavarhatják a tanulók elképzeléseit, akik már kialakították magukban a tört fogalmát a felosztás kontextusában. Lényeges, hogy ennek a zavarnak tudatában legyünk, ha ezt a sémát választjuk a törtek tanításához.

Észrevételek és oktatási implikációk

A jelen tanulmányban bemutatott elemzés arra a feltevésre épül, hogy a gyerekek cselekvési sémáikból, valamint ezek reflexióiból kiindulva tanulják meg a matematikai fogalmakat, amely reflexiók magukból a sémákból, társas interakcióból, valamint tanároktól és társaktól származnak. Kétféle, osztási szituációkban használható cselekvési sémát különböztettem meg: felosztási, amely egy egész egyenlő részekre osztását jelenti, valamint megfeleltetési szituációkat, amelyben két mennyiség (vagy mérték) szerepel, egy felosztandó mennyiség és az abból részesülők száma. A két cselekvési séma kifejlődése különböző: 5-6 éves gyerekek egészen jól alkalmazzák a megfeleltetést egyenlő részek létrehozására, míg nagy nehézségekkel küzdenek folytonos mennyiségek felosztásakor.

Feltártuk a két említett cselekvési séma nyújtotta lehetőségeket, és feltételeztük azok különbözőségét. A megfeleltetési szituációk alkalmasak arra, hogy a gyerekek némi belátást nyerjenek a törtek ekvivalenciájába, amikor az osztó és az osztandó különbözik, azt gondolva, hogy ha kétszer annyi szétosztandó dolog van, és kétszer annyian részesülnek belőlük, akkor mindenki részesedése ugyanakkora marad. A felosztásnál a gyerekek úgy érthették meg a törtek ekvivalenciáját, hogy felismerték, a részek száma és mérete kompenzálja egymást: ha egy egészet kétszer annyi részre vágunk, az egyes részek mérete megfeleződik. A rendelkezésre álló adatok azt mutatják, hogy a megfeleltetést használó gyerekek hipotéziseinknek megfelelően némileg megérthetik az ekvivalencia működését, azonban a felosztást használók nem használták az elvárt érveket.

A tanulmányban áttekintett kutatások azt mutatják, hogy néhány gyerek képes úgy gondolkodni a mennyiségekről, mint amelyek tört formában reprezentáltak anélkül, hogy tudná, hogyan jelölje azokat. *Kornilaki* és *Nunes* (2005) demonstrálták, hogy olyan gyerekek is képesek sorba rendezni mennyiségeket és megállapítani azok ekvivalenciáját – bizonyos számú torta felosztásával több gyerek között – akik még nem tanultak a törtekről és nem tudták számokkal leképezni a tört mennyiségeket.

A fentiek nagy jelentősséggel bírnak az oktatás gyakorlatára. Először is, tudjuk, hogy a gyerekek képesek természetes számok által reprezentált mennyiségekről gondolkodni anélkül, hogy megszámolnák az elemeket; azt is tudjuk, hogy képesek törtek által reprezentált mennyiségekről gondolkodni anélkül, hogy ismernék a tört-reprezentációt. Ez azt jelenti, hogy az iskolák már a törtek reprezentációjának tanítását megelőzően vagy azzal egyidőben fejleszthetnék a gyerekek kvantitatív gondolkodását. Jelenleg a legelterjedtebb gyakorlat – legalábbis az Egyesült Királyságban – a megjelölésre törekvés, s csak később segítik a tanulók törtek sorba rendezésével és ekvivalenciájával kapcsolatos belátásainak kifejlődését.

Másodszor, újra kellene gondolni a gyerekek tört-koncepciójának felosztáshoz kapcsolását. Ez a séma lassabban fejlődik, mint a megfeleltetés sémája és úgy tűnik, kisebb mértékű belátást enged a tört mennyiségek viszonyaiba.

Harmadszor, a tanárok profitálhatnak abból, ha figyelembe veszik a gyerekek törtek sorrendjére, illetve ekvivalenciájára vonatkozó érveléseit. Az oktatási gyakorlat során úgy tűnik, hogy algoritmusokat tanítunk a gyerekeknek, amelyek a mennyiségek megértése nélkül reprezentálják ezeket a belátásokat. Hiába kapják a gyerekek azt a feladatot, hogy többször egymás után duplázzák meg a számlálót és a nevezőt és így hozzanak létre ekvivalens törteket, a folyamat sikeres megtanulása nem egyenlő annak belátásával, hogyan is működik az. Ha a tanár ismeri a tanulók érveit az ekvivalenciákkal kapcsolatban, akkor a tanár segíthet a tanulónak számszerűen is kifejezni belátását, esetleg létrehozni egy algoritmust.

Végül, az itt bemutatott elemzés a törtek tanítását és tanulását vizsgáló új kutatási irányt nyit. Az új kutatási kérdés forrása az az elgondolás, mely szerint a gyerekek belátást nyerhetnek a tört mennyiségek relációiba még azelőtt, hogy le tudnák írni azokat. Lehetséges felvázolni egy kutatási tervet, amely nem a gyerekek törtekre vonatkozó tévképzeteivel foglalkozna, ahogyan sok múltbeli munka, hanem a gyerekek törtekkel kapcsolatos sikerélményeivel, amikor a tanítás a mennyiségek viszonyainak átgondolásából indul ki a reprezentációk megtanultatása helyett.

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani az ESRC-Teaching and Learning Research Programme-nak (Award No: L139251015), nagyvonalú támogatásuk nélkül a tanulmányban bemutatott empirikus vizsgálatok nem válhattak volna valóra. Az évek során a kollégáimmal történő beszélgetések hatására a tanulmányban ismertetett elképzeléseim sokat fejlődtek, észrevételeikért nagyon hálás vagyok. *Peter Bryant*, *Ursula Pretzlik*, *Jane Hurry*, *Deborah Evans*, *Daniel Bell*, *Joanna Wade* és a projektben résztvevő valamennyi tanár és tanuló nagy mértékben hozzájárult és alakította elképzelésimet.

Irodalom

Behr, M. J., Wachsmuth, I., Post, T. R. és Lesh, R. (1984): Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education*, **15**. 5. sz. 323–341.

Behr, M., Harel, G., Post, T. és Lesh, R. (1992): Rational number, ratio, proportion. In: Grouws, D. A. (szerk.): *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Macmillan, New York. 296–333.

Behr, M., Lesh, R., Post, T. és Silver, E. A. (1983): Rational number concepts. In: Lesh, R. és Landau, M. (szerk.): *Acquisition of Mathematical Concepts and Processes*. Academic Press, New York. 91–126.

Brousseau, G., Brousseau, N. és Warfield, V. (2004): Rationals and decimals as required in the school curriculum Part 1: Rationals as measurement. *Journal of Mathematical Behavior*, **23**. 1–20.

Brousseau, G., Brousseau, N. és Warfield, V. (2007): Rationals and decimals as required in the school curriculum Part 2: From rationals to decimals. *Journal of Mathematical Behavior*, **26**. 281–300.

Charles, K. és Nason, R. (2000): Young children's partitioning strategies. *Educational Studies in Mathematics*, **43**. 191–221.

Cooney, T. J., Grouws, D. A. és Jones, D. (1988): An agenda for research on teaching mathematics. In: Grouws, D. A. és Cooney, T. J. (szerk.): *Effective mathematics teaching*. VA: Erlbaum and National Council of Teachers of Mathematics, Reston, Hillsdale. 253–261.

Correa, J., Nunes, T. és Bryant, P. (1998): Young children's understanding of division: The relationship between division terms in a noncomputational task. *Journal of Educational Psychology*, **90**. 321–329.

Davis, G. E. és Hunting, R. P. (1990): Spontaneous partitioning: Preschoolers and discrete items. *Educational Studies in Mathematics*, **21**. 367–374.

Davis, G. E. és Pepper, K. L. (1992): Mathematical problem solving by pre-school children. *Educational Studies in Mathematics*, **23**. 397–415.

Davis, G. E. és Pitkethly, A. (1990): Cognitive aspects of sharing. *Journal for Research in Mathematics Education*, **21**. 145–153.

Donaldson, M. (1978): *Children's minds*. Fontana, London.

Empson, S. B. (1999): Equal sharing and shared meaning: The development of fraction concepts in a First-Grade classroom. *Cognition and Instruction*, **17**. 3. sz. 283–342.

Empson, S. B., Junk, D., Dominguez, H. és Turner, E. (2005): Fractions as the coordination of multiplicatively related quantities: a cross-sectional study of children's thinking. *Educational Studies in Mathematics*, **63**. 1–28.

Fennell, F. S. és mtsai (2008): *Report of the Task Group on Conceptual Knowledge and Skills*. Department of Education, The Mathematics Advisory Panel, Washington DC: U.S.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. és Marino, M. (1985): The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, **16**. 3–17.

Frydman, O. és Bryant, P. E. (1988): Sharing and the understanding of number equivalence by young children. *Cognitive Development*, **3**. 323–339.

Hierbert, J. és Tonnessen, L. H. (1978): Development of the fraction concept in two physical contexts: An exploratory investigation. *Journal for Research in Mathematics Education*, **9**. 5. sz. 374–378.

Hunting, R. P. és Sharpley, C. F. (1988a): Preschoolers’ cognition of fractional units. *British Journal of Educational Psychology*, **58**. 172–183.

Hunting, R. P. és Sharpley, C. F. (1988b): Fractional knowledge in preschool children. *Journal for Research in Mathematics Education*, **19**. 2. sz. 175–180.

Kamii, C. és Clark, F. B. (1995): Equivalent Fractions: Their Difficulty and Educational Implications. *Journal of Mathematical Behavior*, **14**. 365–378.

Kerslake, D. (1986): *Fractions: Children's Strategies and Errors: A Report of the Strategies and Errors in Secondary Mathematics Project*. NFER-Nelson, Windsor.

Kieren, T. (1988): Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. In: Hiebert, J. és Behr, M. (szerk.): *Number concepts and operations in the middle-grades*. VA: National Council of Teachers of Mathematics, Reston. 53–92.

Kieren, T. E. (1993): Rational and Fractional Numbers: From Quotient Fields to Recursive Understanding. In: Carpenter, T., Fennema, E. és Romberg, T. A. (szerk.): *Rational Numbers: An Integration of Research*. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, N.J. 49–84.

Kornilaki, K. és Nunes, T. (2005): Generalising Principles in spite of Procedural Differences: Children's Understanding of Division. *Cognitive Development*, **20**. 388–406.

Lamon, S. J. (1996): The Development of Unitizing: Its Role in Children's Partitioning Strategies. *Journal for Research in Mathematics Education*, **27**. 170–193.

Larson, C. N. (1980): Locating proper fractions on number lines: Effect of length and equivalence. *School Science and Mathematics*, **53**. 423–428.

Mamede, E. (2008): Focusing on children’s early ideas of foactions. In: Maj, B., Pytlak, M. és Swoboda, E. (szerk.): *Supporting Independent Thinking Through Mathematical Education*. Wydawnictwo Uniwersytetu, Rzeszowskiego. 61–67. (www.cme.rzeszow.pl/img/part_1.pdf)

Miller, K. (1984): Measurement procedures and the development of quantitative concepts. In: Sophian, C. (szerk.): *Origins of cognitive skills. The Eighteen Annual Carnegie Symposium on Cognition*. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey. 193–228.

Novillis, C. F. (1976): An Analysis of the Fraction Concept into a Hierarchy of Selected Subconcepts and the Testing of the Hierarchical Dependencies. *Journal for Research in Mathematics Education*, **7**. 131–144.

Nunes, T. és Bryant, P. (2004): *Children's insights and strategies in solving fractions problems.* Paper presented at the First International Conference of the Greek Association of Cognitive Psychology, Alexandropolis, Greece.

Nunes, T. és mtsai (2008): *Children's understanding of the equivalence of fractions. An analysis of arguments in quotient situations*. Kézirat.

Nunes, T., Bryant, P., Pretzlik, U. és Hurry, J. (2006): *Fractions: difficult but crucial in mathematics learning*. ESRC-Teaching and Learning Research Programme, London Institute of Education, London.

Ohlsson, S. (1988): Mathematical meaning and applicational meaning in the semantics of fractions and related concepts. In: Hiebert, J. és Behr, M. (szerk.): *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*. VA: National Council of Mathematics Teachers, Reston. 53–92.

Olive, J. és Steffe, L. P. (2002): The construction of an iterative fractional scheme: the case of Joe. *Journal of Mathematical Behavior*, **20**. 413–437.

Olive, J. és Vomvoridi, E. (2006): Making sense of instruction on fractions when a student lacks necessary fractional schemes: The case of Tim. *Journal of Mathematical Behavior*, **25**. 18–45.

Piaget, J. (1952): *The Child's Conception of Number*. Routledge & Kegan Paul, London.

Piaget, J., Inhelder, B. és Szeminska, A. (1960): *The Child's Conception of Geometry*. Harper & Row, New York.

Pitkethly, A. és Hunting, R. (1996): A Review of Recent Research in the Area of Initial Fraction Concepts. *Educational Studies in Mathematics*, **30**. 5–38.

Pothier, Y. és Sawada, D. (1983): Partitioning: The Emergence of Rational Number Ideas in Young Children. *Journal for Research in Mathematics Education*, **14**. 307–317.

Saenz-Ludlow, A. (1994): Michael's Fraction Schemes. *Journal for Research in Mathematics Education*, **25**. 50–85.

Stafylidou, S. és Vosniadou, S. (2004): The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction*, **14**. 503–518.

Steffe, L. P. (2002): A new hypothesis concerning children's fractional knowledge. *Journal of Mathematical Behavior*, **102**. 1–41.

Steffe, L. P. és Tzur, R. (1994): Interaction and children's mathematics. *Journal of Research in Childhood Education*, **8**. 2. sz. 99–116.

Streefland, L. (1987): *How lo Teach Fractions So As to Be Useful*. The State University of Utrecht, Utrecht, The Netherlands.

Streefland, L. (1993): Fractions: A Realistic Approach. In: Carpenter, T. P., Fennema, E. és Romberg, T. A. (szerk.): *Rational Numbers: An Integration of Research.* Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, NJ. 289–326.

Streefland, L. (1997): Charming fractions or fractions being charmed? In: Nunes, T. és Bryant, P. (szerk.): *Learning and Teaching Mathematics. An International Perspective.* Psychology Press, Hove, UK. 347–372.

Tzur, R. (1999): An Integrated Study of Children's Construction of Improper Fractions and the Teacher's Role in Promoting That Learning. *Journal for Research in Mathematics Education*, **30**. 390–416.

Vergnaud, G. (1997): The nature of mathematical concepts. In: Nunes, T. és Bryant, P. (szerk.): *Learning and Teaching Mathematics. An International Perspective*. Psychology Press, Hove, UK. 1–28.

Yackel, E., Cobb, P., Wood, T., Wheatley, G. és Merkel, G. (1990): The importance of social interaction in children's construction of mathematical knowledge. In: Cooney, T. J. és Hirsch, C. R. (szerk.): *Teaching and learning mathematics in the 1990s. 1990 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics*. VA: National Council of Teachers of Mathematics, Reston. 12–21.

ABSTRACT

TEREZINHA NUNES: UNDERSTANDING RATIONAL NUMBERS

Although there are different subconstructs or meanings for rational numbers (see, for example, Behr, Harel, Post, & Lesh, 1992; Kieren, 1988), it seems reasonable to seek the origin of children's understanding of rational numbers in their understanding of division. Our hypothesis is that in division situations children can develop some insight into the equivalence and order of quantities that would normally be represented by fractions, even in the absence of knowledge of representations for fractions, either in written or oral form. In our analysis we reviewed the empirical literature of this field. The mathematics education literature traditionally considers two types of division problems: partitive and quotative division. This classification distinguishes two ways in which children use the same scheme of action, which will be referred to here as partitioning. Although partitioning is the scheme that is most often used to introduce children to fractions, it is not the only scheme of action relevant to division. Children also use correspondences in division situations when the dividend is represented by one measure and the divisor is represented by another measure. Empirical results show that both partitioning and correspondences could help children understand something about the equivalence between quantities. However, the reasoning required to achieve this understanding differs across the two schemes of action. Children can use the scheme of correspondences to establish equivalences between sets that have the same ratio to a reference set (Piaget, 1952); re-distribute things after having carried out one distribution (Davis and colleagues); to reason about equivalences resulting from division both when the dividend is larger or smaller than the divisor (Bryant and colleagues; Empson, 1999; Nunes and colleagues); and to order fractional quantities (Kieren, 1993; Kornilaki & Nunes, 2005; Mamede, 2008). In using partitioning, students can develop insight into the inverse relation between the number of parts and the size of the parts through the partitioning scheme but there is no evidence that they realize that if you cut a whole in twice as many parts each one will be half in size. Finally, improper fractions seem to cause uneasiness to students who have developed their conception of fractions in the context of partitioning; it is important to be aware of this uneasiness if this is the scheme chosen in order to teach fractions.

Magyar Pedagógia, **108**. Number 4. 5–27. (2008)

Levelezési cím / Address for correspondence: Terezinha Nunes, Department of Education, University of Oxford, 15 Norham Gardens, Oxford, OX2 6PY