MAGYAR PEDAGÓGIA
99. évf. 2. szám 141–155. (1999)

A GONDOLKODÁS FLEXIBILITÁSA ÉS A MATEMATIKAI TELJESÍTMÉNY

Kontra József
Munkácsy Mihály Gimnázium és Szakközépiskola

Az iskolai matematika tananyag elsajátításában fontos szerepet töltenek be a begyakorlott gondolati műveletek, az algoritmizált megoldások. Tény, hogy az ismeretek alkalmazása számos reprodukciós lehetőséget kínál. A tanuló egy-egy problémával szembekerülve gyakran akaratlanul is hasonló feladatok után kutat az emlékezetében. Ám a matematika gazdagabb annál, hogy reprodukálható gondolkodási sémákba foglaljuk. Problémamegoldáskor a próbálkozások, kreatív kísérletek nélkülözhetetlenek. Ha az alkalmazott módszer nem megfelelő, esetleg egy másik az lesz. A megoldás érdekében módosíthatjuk a probléma adatait, megváltoztathatjuk ezek egymáshoz való viszonyát, kapcsolataikat. A gondolkodás flexibilitását megkívánó problémaszituációkat jól mutatják be a (matematikai) fejtörők, amelyekhez úgy tűnik, sok tanuló vonzódik. Vizsgálatunkban az ilyen „szórakoztató” feladatok megoldása és a tanítási-tanulási folyamat során osztályzatban kifejezett matematikai teljesítmény kapcsolatát kíséreltük megközelíteni. A felmérésbe bevont 5. és 7. osztályos tanulók összlétszáma 826 fő volt. Adataink megerősítik azt a tapasztalatot, hogy az általános iskolás életkorban az általában jobb képességű tanulók általában jobb jegyeket kapnak (*Csapó*, 1998).

Fejtörők, belátásproblémák

A *flexibilis gondolkodás Dreyfus* és *Eisenberg* (1998. 275. o.) meghatározása szerint a probléma „belsejébe” jutás képességét foglalja magában, és azt, hogy képesek vagyunk több különböző aspektusból nézni azt. A flexibilitást igénylő feladatok illusztrálására a két kutató megemlíti a következő geometriai fejtörőt: *Építsünk 6 fogpiszkálóval négy egyenlő oldalú háromszöget!* A megoldás lényege a feladatszituáció lehetőségeinek a felismerése: a *térben* kell egy tetraédert összerakni. A kezdeti síkbeli próbálkozásoktól a térbeli megoldásig az ismeretek átszerveződése, egy (a síkbeli alakzatot meghatározó) hallgatólagosan elfogadott feltétel átértékelése (átstruskturálódás) vezet el. Ez a felismerés eszünkbe kell juttassa: A „hat gyufaszál probléma” az alaklélektani eredetű, de modernebb kognitív pszichológiai vizsgálatokban szerepet játszó *belátás* folyamatához köthető probléma (*Mayer*, 1979. 65. o.). Ezért célszerűnek gondoltuk, hogy a flexibilis problémamegoldás vizsgálatára alkalmas tesztlapok összeállításához (*hasonló* rendelkezésre álló feladatok felderítése, újabbak kifejlesztése céljából) részletesebben foglalkozzunk a *belátás* (insight, Einsicht) fogalmával.

A következőkben röviden felvázoljuk a témánk szempontjából fontosabb nézeteket. Mielőtt azonban erre rátérnénk, szeretnénk aláhúzni, hogy a belátás jelenségének alaposabb megismeréséhez kívánatos a releváns szakirodalom tanulmányozása. Ekkor mélyebben megérthetők az áttekintésünkben részletesebb kifejtés nélkül szereplő pszichológiai elmélettöredékek, valamint fellelhetők más elképzelések.

Mindezek előrebocsátása után elméleti kiindulásként megkíséreljük elhelyezni a *belátást* a problémamegoldás kutatási területén: a *nem rutinproblémák* esetében a *probléma-reprezentáció* és a *produktív gondolkodás* problematikája (*Mayer*, 1995). Csakhogy ez a megfogalmazás – még első közelítésként is – túlságosan elnagyoltnak tűnik, mivel a határok elmosódnak.

Vitatható például a reproduktív és a produktív gondolkodás szétválasztása. Tudniillik elfogadható az a kijelentés, hogy minden gondolkodás alapvető sajátossága a produktivitás (*Lénárd*, 1984). Pontosabban: Nem rutinproblémák megoldásakor beszélhetünk-e pusztán reproduktív gondolkodásról? A memória intellektuális működése szükséges, de nem elégséges. Vagyis ebben a kontextusban nem redundáns-e a produktív gondolkodás terminus?

Ugyancsak felvetődött már, hogy az úgynevezett *rutinproblémák* megoldása tekinthető-e *valódi* problémamegoldásnak (*Schoenfeld*, 1985). Még ha erre a kérdésre megengednénk az igen választ, a rutinproblémák köre akkor is csak rendkívül szűk területet képezne a problémamegoldás vizsgálatában. A reziduális kategória, a nem rutinproblémák osztálya túl bő lenne a belátás jelenségének a megragadásához. Lényegében hasonló mondható el a *probléma-reprezentáció* kapcsán. A problémamegoldás egyik legismertebb fogalmát vétek csupán a belátás fogalmához kötni.

Mindezt összegezve azt mondhatnánk, a belátás alig vagy egyáltalán nem különül el a problémamegoldástól. A belátás elhatárolásához – amennyiben lehetséges – a jelenség további megközelítése szükséges.

A belátás megnyilvánulásának következő jellemzőit ajánlatos figyelembe venni. A belátás (1) *váratlanul*, meglepetésszerűen jelentkezik, (2) *spontán* váltódik ki, (3) *hirtelen*, *átmenet nélkül* következik be, végül (4) a korábbi vágy, törekvés teljesülése után a feszültségoldó hatásával az *elégedettség* átélését idézi elő („Aha!" élmény) (*Seifert*, *Meyer*, *Davidson*, *Patalano* és *Yaniv*, 1995). Mármost annak értékelése, hogy *bizonyos* feladatok megoldása belátással történt, elvégezhető úgy, hogy a problémamegoldás folyamán a megoldóval időnként jeleztetjük, mennyire közelinek érzi a megoldást (feeling–of–warmth judgements). Ha a belátásproblémák megoldása váratlanul és hirtelen születik, akkor a belátás jelenségénél az ítéletek *ugrásszerű* változása várható (*Metcalfe*, 1986; *Metcalfe* és *Weibe*, 1987; lásd még *Davidson*, 1995). Ez összhangban van az alaklélektani felfogással.

Az előző sajátosságoknak megfelelően, empirikus vizsgálati eredmények alapján megadhatnánk a belátásproblémák osztályát. Ezzel kapcsolatban *Weisberg* (1995) figyelmeztet arra, hogy a felosztás elvégzéséhez elengedhetetlen az adatgyűjtés, más szóval elméleti alapokra nem támaszkodhatunk. Felveti, hogy a besorolás meg a besorolás igazolása is az empirikus adatokra épül. Ráadásul vannak problémák, amelyek ebben a csoportosításban belátásproblémák, viszont az alaklélektani felfogás szerint nem azok.

A dolgot tovább bonyolítja, hogy egyes *belátásproblémák* (például a „kilenc pont probléma"; lásd *Horváth*, 1986, 260. o.) megoldása olyan mentális folyamatoknak tulajdonítható, mint a felidézés, a hipotézis ellenőrzés, a múltbéli tapasztalatokon alapuló próba-szerencse megközelítés, s így a *belátás* terminus haszontalan lehet (*Weisberg* és *Alba*, 1981, 1982; *Seifert* és mtsai, 1995). Ehhez a nézethez közel állnak azok a modellek, amelyek az alaklélektani *átstrukturálódást* az információfeldolgozás fogalmaival magyarázzák (*Keane*, 1989; *Ohlsson*, 1984a, 1984b).

A nehézségeket jellemzi, hogy *Sternberg* és *Davidson* elmélete (Three–Process Theory of Insight) (*Davidson*, 1986; *Davidson* és *Sternberg*, 1986. idézi: *Davidson*, 1995) szerint a belátás elemzésekor voltaképp három folyamat különíthető el: (1) a *szelektív kódolás* (selective encoding), (2) a *szelektív kombináció* (selective combination) és (3) a *szelektív összehasonlítás* (selective comparison). Ahhoz, hogy ezek a folyamatok valóban belátásra utaljanak, nem jelentkezhetnek mindjárt a problémával szembekerülve. De ha fellépnek, az csak hirtelen történhet, és egyúttal a probléma-reprezentáció változását kell, hogy eredményezzék. Valószínűleg más folyamatok is szükségesek. Az elmélet *folyamatorientált*, hiszen egy probléma belátással és belátás nélkül is megoldható, azaz a különbség nem a produktumban nyilvánul meg.

Azonban *Weisberg* (1995) rámutat, hogy *Sternberg* és *Davidson* nem adott szempontokat a problémák osztályozásához. Kiemeli, hogy a szerzők független bizonyítékok nélkül jellemzik a szóban forgó folyamatokkal az adott feladatok megoldását. Egyszersmind lényeges az a megállapítása, hogy a belátás fogalmát a hagyományosnál tágabb értelemben használják, következőleg néhány átstrukturálódás nélkül megoldható problémát is belátásproblémának tekintenek.

Ezen a ponton úgy tűnik, a belátásnak nincs egységes elmélete. Ugyanazon problémára (lásd a „kilenc pont probléma") vonatkozó adatokból a kutatók szembenálló következtetéseket vonnak le. Az ellentmondások egyik lehetséges forrása a *belátás* terminus eltérő használata. Persze előfordulhat, hogy a vizsgálatokban alkalmazott feladatok nem mindegyike *belátásprobléma*. Mindezen indokok alapján azt tartottuk helyesnek, hogy *a mérésünkben egy rendszeres taxonómia alapján választjuk ki feladatainkat*, és úgy döntöttünk, *Weisberg* (1995) relatíve könnyen használható problémarendszeréhez folyamodunk. A továbbiakban ezt ismertetjük.

Weisberg a problémák osztályozásához a belátás alaklélektani definíciójából indult ki, miszerint belátásról akkor beszélünk, ha a problémahelyzet átstrukturálódása vezet a probléma megoldásához, azaz megváltozik a probléma-reprezentáció. Következésképpen érdemes vázlatosan áttekintenünk, miképpen vélekedtek a belátás jelenségéről az alaklélektan előfutárai, képviselői. Öt elgondolást emelünk ki (*Horváth*, 1986; *Lénárd*, 1984; *Mayer*, 1979, 1995).

1) *Otto Selz komplexumelmélete* szerint egy probléma megoldását az adott és az elérendő elemek koherens struktúrába foglalása jelenti. Vagyis a belátás egy *komplexum* kiegészítése. A kiegészítés adott célnak megfelelő, a gondolkodásra *szkematikus anticipáció* jellemző. (Lásd *Selz* 1910–20-as években írt tanulmányait.)

2) *Köhler* (1929, 1969) a *vizuális információ átszervezésében*, a probléma *másként* látásában véli a belátás lényegét. Ez a felfogás a belátás vizuális természetét helyezi előtérbe.
3) *A probléma újraértékelése, újraértelmezése Duncker* (1945) szerint vonatkozhat a célra vagy az adott információra. Az egyes megoldási javaslatok bizonyos megoldási elvet rejtenek, úgynevezett *funkcionális értéket* hordoznak. A probléma megoldása a funkcionális megoldások fokozatos specializálódásával, konkretizálódásával történhet. A dolgok újraértékelésében külső forrás segíthet.
4) *A probléma megoldását gátló tényezők eliminálását* érthetővé teszi a gondolkodási merevség. A már megismert *funkcionális kötöttség* és a *beállítódás* (Einstellung vagy problem-solving set; *Luchins*, 1942; *Luchins* és *Luchins*, 1950) jelenségei eleveníthetők itt fel.
5) *Wertheimer* (1945/1959) a belátást kapcsolatba hozza az *analóg gondolkodással*. Vizsgálatai illusztrálják, hogy egy adott problémaszituáció *struktúrájának* megismerésével nyert tudás alkalmazható egy újabb helyzetben. Noha az asszociációs pszichológusok ugyanúgy hangsúlyozzák a múltbeli tapasztalatok szerepét, itt többről van szó.

Összefoglalva megállapítható, hogy a belátás fogalma a *problémastruktúra megértésével* kapcsolatos. A hangsúly a belső aspektuson, a probléma relációinak, struktúrájának a megragadásán s átfogásán van. Ezért az alaklélektan szellemében a gondolkodási tevékenység magyarázata olyanfajta problémákkal kereshető, amelyek valódi struktúrái nem leplezetlenek, ahol a szituációk könnyen félreinterpretálhatók.

Ezzel eljutottunk a problémák osztályozásához (*Weisberg*, 1995). Az a tény, hogy belátásproblémával szembekerülve a belső lényeg nehezen appercipiálható, felveti azt a követelményt, hogy ekkor a gondolkodásban *diszkontinuitás* mutatkozik. A megoldó kezdeti megközelítése terméketlen, ezért *másképpen* kell próbálkoznia. Ám nem minden diszkontinuitás *átstrukturálódás* eredménye, hiszen újabb megoldási javaslat keletkezhet a problémaszituáció átértékelése nélkül is. Esetünkben azok a problémák érdekesek, ahol megváltozott a kezdeti probléma-reprezentáció. Világos, hogy ezek lehetnek a *belátásproblémák*. A mondottakból kitűnik, hogy további megkülönböztetés indokolt. Azok a problémák, amelyek esetében az átstrukturálódás lehetséges, de nem feltétlenül, egy alosztályt képezhetnek, és a *nem tiszta* (hybrid) *belátásproblémák* kifejezéssel különíthetők el a *tiszta* (pure) *belátásproblémáktól*. Ki kell még emelnünk egy igen lényeges körülményt: *ebben a rendszerben a „hat gyufaszál probléma" (a szerző szerint) tiszta belátásprobléma* (*Weisberg*, 1995. 192. o.).

Módszer

A mérőeszközök

Mint tudjuk, ismerettel, tantárgyi témákkal egybefonódó kérdések megoldásában a gondolkodási tevékenység nem lehet eredményes, ha a gondolkodó személy nem rendelkezik megfelelő szakismerettel. A mérés céljának megvalósításához tehát el kellett kerülni, hogy a matematikai előismeretek hiánya, illetőleg a matematikai fogalmak tisztázatlan voltából eredő hibák a feladatmegoldás akadályai legyenek. Így – a matematikai tartalomhoz nem ragaszkodva – olyan feladatokat választottunk, amelyek megértéséhez és megoldásához szükséges tudást a tanulók nagy valószínűséggel birtokolják. Más kérdés, hogy a gondolkodás értelmezésében jelentős különbségek lehetnek, ha a *problémamegoldást* fejtörő feladatok vagy matematikai problémák tükrében tanulmányozzuk (*Horváth*, 1986. 264. o.).

Szinte természetes, hogy a megfelelő validitás érdekében a tesztek készítése során a validnak elfogadott „hat gyufaszál problémá"-hoz viszonyítottuk a további *fejtörőket*. Következőleg a feladatok többségét (*Weisberg* taxonomikus struktúráját és besorolásait követve) *tiszta belátásproblémákból* (lásd *Weisberg*, 1995. 192–193. o.) válogattuk össze.

A többi feladatot a következő lépések (*Gick* és *Lockhart*, 1995. 207. o.) alapján szerkesztettük, vagy a szakirodalomból gyűjtöttük: (1) Választunk egy kétértelműen leírható dolgot. (2) A dolgot jelölő szót a domináns jellemző automatikus felidézését eredményező semleges kontextusba ágyazzuk. Nyilvánvaló, hogy egy köznapi helyzetben az uralkodó vonás érvényessége várható (lásd még *Horváth*, 1986; *Solso*, 1988). (3) Megfogalmazunk egy, az előbbitől tartalmilag eltérő, manifesztálódását tekintve gyengébb sajátság felelevenítését megkövetelő problémaszituációt.

Világítsuk meg az eljárást egy példával. (1) Egy papagáj lehet *élő* vagy *élettelen*. Kétségkívül mindennapi gondolkodásunkban az élő példány interpretáció a domináns. (2) Képzeljük el, hogy *egy macska lopakodva megközelíti a neki háttal álló papagájt, aztán egy nagyobb ugrással ráveti magát, és megragadja a madarat*. (Közismert, hogy a macskafélék áldozataikat lopva közelítik meg, majd rendszerint hatalmas ugrással beérve, mancsaikkal a földre rántják és fogaikkal végeznek vele.) A kezdeti sztereotip szövegkeretben tehát önkéntelen élő papagájra, a domináns jelentésre gondolunk. (3) A problémát az a további körülmény jelenti, hogy *a papagáj mindvégig meg sem moccant, sőt egy hangot sem hallatott*. Az *eset* bő vített, most már teljes leírásában a korábbi gondolatunk (a papagáj *él*) kapcsán „furcsa", elfogadhatatlan a megtámadott madár „viselkedése". A problémahelyzet (valami „nem stimmel") megoldásához a másik (másodlagos érvényességű) tulajdonság előhívása, azaz annak meglátása szükséges (az adott mintára vonatkozó nehézségmutató $P = 67{,}1\%$; n = 459), hogy a papagáj *élettelen* (műpapagáj is) lehetett. A gondolat rossz irányú kötődéséről (fixation) részletesebben (*Dominowski*, 1981; *Dominowski* és *Dallob*, 1995; *Horváth*, 1986; *Weisberg* és *Alba*, 1981). Végül fontosnak érezzük felhívni a figyelmet arra, hogy *a hamis irányú kötődést Horváth a „hat gyufaszál problémá"-val szemlélteti* (256. o.).

A *próbateszteket* „bemértük", majd elhagytuk azokat az itemeket, amelyekre nem vagy alig született helyes megoldás. Mivel a kapott adatok szerint a „hat gyufaszál probléma" a középiskola 9. és 10. évfolyamán is nehéznek bizonyult ($P = 5{,}1\%$; n = 217), úgy határoztunk, hogy az általános iskolai tanulók számára nem alkalmazzuk. Megtartottuk viszont a *nehezebb* feladatokat, hogy a kiválókat is kiválaszthassuk a tesztelni szándékozott tanulók teljes köréből. A próbamérések adatainak felhasználásával, azonkívül a feladatok strukturális elemzésével törekedtünk arra, hogy az alkalmazott két tesztváltozat (*A* és *B* változat) nehézsége közelítőleg azonos legyen. A tesztfejlesztés során a megkonstruált feladatoknál igyekeztünk a válaszok ismeretében olyan fogalmazásbeli módosításokat elvégezni, hogy lehetőleg az *elvárt választól* eltérő válaszalternatívákat kizárjuk. A két változat mindegyike tizenegy feladatot tartalmaz.

A tesztlapok megoldására 43 perc tiszta munkaidő állt rendelkezésre. A tanulóktól azt vártuk, hogy a kijelölt időn belül a lehető legtöbb feladatot oldják meg. A válaszok kvantitatív értékelésénél csak két kategóriát használtunk: *helyes* (1 pont) vagy *nem helyes* (0 pont). *Helyes válasz* kritériumaként az *elvárt* megoldásokat tekintettük. A hiányzó válaszok pontértéke 0.

Az adatfelvétel

A vizsgálatot Bács-Kiskun megyében, Csongrád megyében, valamint Somogy megyében végeztük 1998 márciusában. A JATE Pedagógiai Tanszéke, személy szerint Vidákovich Tibor indította el, szervezte és irányította a mérést. A felmérésben 16 általános iskola vett részt (5. osztály: 346 fő; 7. osztály: 480 fő) (*1. táblázat*). Az adatfeldolgozásból kihagytuk a részvételt visszautasító (a javító szaktanárok kritikus elemzésében a mérést *komolytalanul* fogadó) tanulókat. Az osztályonként csoportosított mintát felosztottuk a tesztlapváltozatok alapján: (1) 5. osztály: *A* változat: 211 fő (25,54%), *B* változat: 135 fő (16,34%); (2) 7. osztály: *A* változat: 248 fő (30,02%) *B* változat: 232 fő (28,09%). A *2. táblázat* összegzi a populáció 1997/98-as tanév félévi matematika eredményei.

A közreműködő pedagógusok *mérési útmutatókban* ismerhették meg a vizsgálat általános céljait, a lebonyolítás részleteit. Kértük őket, hogy mindenben a tájékoztatók szerint járjanak el, továbbá a tesztek megíratása előtt – az osztályt tanító szaktanárokkal egyeztetve – gondoskodjanak a tanulók megfelelő motiválásáról. A tanulók a feladatlapokat tanórai foglalkozások keretében tanárok felügyelete mellett töltötték ki.

1. táblázat. A minta megoszlása (n = 826)

	Általános iskolák száma	*Osztályok száma*		*Tanulók száma (arányuk)*		*Létszám (arányuk)*
		5. o.	*7. o.*	*5. o.*	*7. o.*	
Bács-Kiskun megye	7	10	11	138 (16,71%)	198 (23,97%)	*336 (40,68%)*
Csongrád megye	5	9	10	117 (14,16%)	149 (18,04%)	266 *(32,20%)*
Somogy megye	4	7	7	91 (11,02%)	133 (16,10%)	*224 (27,12%)*
Összesen	*16*	*26*	*28*	*346 (41,89%)*	*480 (58,11%)*	*826 (100%)*

2. táblázat. A tanulók százalékos megoszlása az 1997/98-as tanév félévi matematika jegye szerint (n = 826)

Félévi jegy	*ÖSSZESEN* (826 fő)	*5. osztály*			*7. osztály*		
		Összesen (346 fő)	*A* változat (211 fő)	*B* változat (135 fő)	*Összesen* (480 fő)	*A* változat (248 fő)	*B* változat (232 fő)
Jeles	*14,77*	*7,26*	4,24	3,03	*7,51*	3,27	4,24
Jó	*29,54*	*14,53*	8,84	5,69	*15,01*	6,78	8,23
Közepes	*24,46*	*9,56*	5,81	3,75	*14,89*	7,75	7,14
Elégséges	*21,19*	*8,23*	4,96	3,27	*12,95*	6,78	6,17
Elégtelen	*3,03*	*0,73*	0,61	0,12	*2,30*	1,82	0,48
Nincs adat	*7,02*	*1,57*	1,09	0,48	*5,45*	3,63	1,82

Eredmények

Ha feltételezzük, hogy tesztünk minden feladata hozzávetőlegesen ugyanazt méri, mint a teszt egésze, akkor elvárhatjuk, hogy a feladatok megoldásai a teszt összpontszámával korreláljanak. Az 5. osztályos, a 7. osztályos, valamint az 5. és 7. osztályos mintákon változatonként megvizsgálva a számba vehető 66 korrelációs együtthatót, minden esetben szignifikáns eredmény adódott: egy közülük a $p = 0{,}01$ valószínűségi szinten szignifikáns, a többi számított értékre nézve $p < 0{,}001$.

A részminták matematikai teljesítményeit és a tesztfeladatok megoldásában elért átlageredményeket a *3.* táblázat mutatja. A táblázatban szerepelnek a tesztek belső konzisztenciájának jellemzésére szolgáló reliabilitásmutatók is. Talán nem felesleges arra utalni, hogy a reliabilitás a tesztnek és a figyelembe vett populációnak együttes jellemzője.

Tesztváltozatonként külön számolva kétmintás *t*-próbával vizsgáltuk az 5. és a 7. osztályos tanulók félévi matematika osztályzataiban található különbséget. Csak az *A* változat részmintáján kaptunk szignifikáns eredményt ($p < 0{,}01$), így megállapíthatjuk, hogy ebben az összemérésben a két korosztály lényegesen különböző teljesítményt mutat.

Az évfolyamok tesztpontszámainak összehasonlításakor a varianciák eltérésére az *F*-próba erősen szignifikáns értéket adott (mindegyik tesztlapra vonatkozóan $p < 0{,}01$), ezért a kétmintás *t*-próba egyik esetben sem alkalmazható. A megfelelő nemparaméteres eljárást, a Mann–Whitney-próbát választottuk. Példánkban a különbségek szignifikánsak a $p = 0{,}001$ szinten is, azaz a két korcsoport teszteredményeiben lényeges az eltérés. Mindent egybevetve a tesztlapváltozatok megoldási szintje a hetedikes mintán jelentősen magasabb, ugyanakkor az *A* változatot megoldó ötödik osztályos tanulók szignifikánsan jobban teljesítettek matematikából.

3. táblázat. Az alapadatok jellemzői és a reliabilitásmutatók

	5. osztály		*7. osztály*		*5. és 7. osztály*	
	A változat	*B* változat	*A* változat	*B* változat	*A* változat	*B* változat
A matematika osztályzatok átlaga	3,46	3,52	3,11	3,36	3,28	3,42
~ szórása	1,07 (n=202)	1,05 (n=131)	1,13 (n=218)	1,07 (n=217)	1,12 (n=420)	1,06 (n=348)
A tesztpont ér-tékek átlaga	2,14	1,56	3,38	3,34	2,81	2,68
~ szórása	1,93 (n=211)	1,93 (n=135)	2,37 (n=248)	2,67 (n=232)	2,26 (n=459)	2,57 (n=367)
Cronbach-féle alfa koeffici-ensek	0,7238	0,7354	0,7423	0,7627	0,7541	0,7822

Az 5., 7., valamint 5. és 7. osztályos mintákon a két tesztváltozat itemjei és a matematika teljesítmény között összesen 66 korrelációs együttható számítható ki (4. táblázat). Közülük 61 szignifikás ($p < 0,05$). Ezen belül 53 esetben $p < 0,01$, sőt 44 kapcsolatra vonatkozóan a $p < 0,001$ is fennáll. Fontos, hogy a három tanulócsoportban a tesztváltozatok összpontszáma (T) és a matematika jegy (M) közötti kapcsolatokat igen erős szignifikanciával ($p < 0,001$) ki tudjuk mondani (*5*. táblázat).

Mivel 0-val és 1-gyel pontoztunk, a teszt összpontszáma a jól megoldott feladatok számával egyenlő. Ezt a pontszámot viszonyíthatjuk az *adott válaszok* teljes számához. Gyakorlatilag ez nem más, mint a jó megoldások száma osztva a *megválaszolt* feladatok számával. A hányados (H) eszerint 0 és 1 közé eső szám. Magas értéke azt jelenti, hogy a tanuló *válaszai többnyire helyesek*. Mind a három mintán (5., 7., 5. és 7. o.) azt találtuk, hogy ez a H mutató (*A*, *B* változat) és a matematika osztályzat (M) pozitív korrelációban vannak ($p < 0,001$) (5. táblázat).

Befejezésül megjegyezzük, hogy esetünkben a viszonylag alacsony korrelációk jelentőségét abban látjuk, hogy az együtthatók 0-tól *tényleg* eltérnek, azaz a változók között fennálló kapcsolatokra utalnak (*Hajtman*, 1971. 258. o.). Az összefüggések hiánya azt jelentené, hogy a fejlettebb gondolkodási képességekkel rendelkező tanulók nem kapnak jobb jegyeket matematikából, mint a gyengébb képességű társaik.

4. táblázat. A tesztváltozatok itemjei és a matematika teljesítmény közti korrelációs együtthatók csoportosítása a szignifikancia kimondhatósága alapján (N = 66)

	Össze-sen	*5. osztály*		*7. osztály*		*5. és 7. osztály*	
		A változat (n=211)	*B* változat (n=135)	*A* változat (n=248)	*B* változat (n=232)	*A* változat (n=459)	*B* változat (n=367)
Nem szig-nifikáns ($p > 0,05$)	9	2	4	1	1	1	0
Szignifi-káns a $p = 0,05$ szinten	57	9	7	10	10	10	11
Szignifi-káns a $p = 0,01$ szinten	52	6	6	10	10	10	10
Szignifi-káns a $p = 0,001$ szinten	39	4	4	6	9	8	8

5. táblázat. A tesztváltozatok összpontszáma (T), a H mutató és a matematika teljesítmény (M) közti korrelációs együtthatók (p < 0,001)

	5. osztály		*7. osztály*		*5. és 7. osztály*	
	A változat	*B* változat	*A* változat	*B* változat	*A* változat	*B* változat
	(n=202)	(n=131)	(n=218)	(n=217)	(n=420)	(n=348)
r_{TM}	0,4290	0,5227	0,4885	0,5471	0,3962	0,4722
r_{HM}	0,3817	0,5291	0,4732	0,5414	0,3724	0,4756

Az eredmények értelmezése

Először a teszteken elérhető eredmények megbízhatóságát vizsgáljuk meg. Kérdés, milyen főbb tényezők játszanak szerepet a reliabilitásmutatók nagyságában.

Középpontba kerül, hogy a feladatok megkívánják a „másként” értelmezést. Ezzel kapcsolatban *Weisberg* (1995. 183. o.) is felfigyelt a szó- és szóláshasználati botlásokra. Mi több: a feltételek leírása szinte sosem teljes, s gondolkodásunk menetét meghatározzák a tartalmi tényezők (*Horváth*, 1986. 256. o.). Néha persze egészen „képtelen” értelmezések adódhatnak. Minél több feladatnál, minél több tanulónál fordul elő a *félreértés*, annál alacsonyabb a reliabilitás.

A másik hibaforrás a teszt nehézsége (3. táblázat). Ha a feladatmegoldók teljesítménye kiegyenlített, a teszt kevésbé megbízhatóan tudja a tanulókat egymástól elkülöníteni. Nem árt megemlíteni, hogy 718 fő (86,92%, n = 826) tesztpontértéke maximum 5 pont. Összesen 635 fő (76,88%, n = 826) ért el 5 pont alatti értéket. Amikor a teszt nehéz, várható még, hogy a tanulók a legtöbb feladat esetében találgatnak.

Ismeretes, hogy a véletlen hibák jobban kiegyenlíthetik egymást, ha a tesztet újabb – egyébként a meglévőkhöz hasonló – itemek hozzáadásával meghosszabbítjuk (*Horváth*, 1993, 1997). (Egy bizonyos reliabilitásszint fölött már nincs értelme e célból tovább hosszabbítani a tesztet.) A 11 itemes tesztek szerkesztésekor igyekeztünk tekintettel lenni a gyakorlatias szempontokra (időigény, elfáradás stb.). Igaz, hogy a két korosztály felméréseit azonos (*A–B*) tesztpárral végeztük.

Végül nem mehetünk el szó nélkül amellett, hogy a reliabilitás érzékeny a megíratás folyamatában fellépő szokatlan, váratlan ingerekre. Az általános iskolai tanulók számára számottevők lehetnek az „apróbb" hatások. Például, amikor valaki leejt valamit, néhány tanuló elveszítheti a gondolatmenetet. Ez elvezet ahhoz, hogy a teljesítmény függ pszichikus tényezőktől (motiváltság, kitartás stb.).

A felsorolt hibaforrások mind számításba jöhetnek. Természetesen egyetlen reliabilitási mutatóból nem lehet megállapítani, hogy a hiba miből származik és milyen arányban az egyik, illetve a másik forrásból (*Nagy*, 1975).

Elemezhetjük a tesztfeladatok jóságát is. Egy item talán legfontosabb jóságmutatója az elkülönítésmutató, az itempontértéknek a tesztpontértékkel való korrelációja. Azt mutatja, hogy az itemre adott helyes vagy helytelen válasz mennyire különbözteti meg az alacsony tesztpontértékű tanulókat a magas tesztpontértékű tanulóktól. Feladataink ebből a szempontból megfelelők.

A következőkben a külső kapcsolatok felvázolásával zárjuk az empirikus vizsgálat eredményeinek elemzését. Adataink szerint az egyes tesztváltozatokon nyújtott teljesítmény összefügg a matematika érdemjeggyel. Ez ugyanúgy érvényes a feladatokra, a 66 ilyen jellegű korrelációs együttható közül 61 szignifikáns ($p < 0,05$).

A jelenséget magyarázhatjuk azzal, hogy a struktúrák felismerése és kiaknázása a problémákban erősíti rugalmasságot, és növeli a hatékonyságot a matematikában (*Dreyfus* és *Eisenberg*, 1998). A struktúra elárulja, mit tudunk és mit tehetünk. Ha a kezdeti kódolás nem aktivizálja a releváns ismereteket, akkor a probléma *újraértékelése*, más megközelítése segíthet. Általában elmondható, hogy a sejtés, a megoldási lehetőség meglátása után a cél felé vezető utat még ki kell dolgozni.

Például szöveges matematikai problémákkal találkozva néhányan első lépésként számokat ragadnak ki a történetből, és a problémabeli kulcskifejezések alapján aritmetikai műveleteket hajtanak végre (*direkt* vagy *közvetlen transzlációs stratégia*). Ebben a felszínes heurisztikus megközelítésben a számolások (egy számszerű válasz megadása) kerülnek előtérbe. Ezzel szemben az úgynevezett *problémamodellező stratégia* a problémaszituáció kvalitatív megértésének kialakításából áll. A megoldónak reprezentálnia kell a kijelentések tartalmát, majd össze kell kapcsolnia azt a probléma-reprezentáció további információival (*Mayer*, 1998; lásd még *Greeno*, 1987).

Ahogy arra korábban hivatkoztunk, az információfeldolgozó elméletekben gyakori *probléma-reprezentáció* (problem representation) kifejezés hasonló az alaklélektani *interpretáció* kifejezés értelméhez. Elnagyoltan a probléma belső interpretálását jelenti; bár ezekben az esetekben a probléma reprezentációja inkább statikus, amíg az alaklélektan képviselőinek terminológiájában a *probléma interpretálása* magában rejt dinamikus változásokat, strukturális erőket (értsd a reprezentáció változásai kerülnek előtérbe) (*Dominowski* és *Dallob*, 1995). A reprezentációs képességek hatékonyabb tanításával – például a matematikai szöveges feladatoknál – megnőhet az *analóg transzfer* valószínűsége (*Novick*, 1992). Ha ugyanazt a struktúrát felismerjük különböző szituációkban, analogikusan oldhatunk meg problémákat (*Keane*, 1988; *Dreyfus* és *Eisenberg*, 1998).

Érdemes némi figyelmet fordítani a problémamegoldás dinamikus és ciklikus vizsgálódó jellegére (*Graeber*, 1994). Mint tudjuk, a problémamegoldó tevékenységben a *vezérlő, szabályozó* (control) folyamatok központi szerepet játszanak. Ezek magukban foglalják a célok (alcélok) megválasztását, a tervek készítését, a fejlődő megoldások értékelését és ellenőrzését (monitoring), illetve amikor szükséges, a megoldások módosítását, illetve elhagyását (*Schoenfeld*, 1985). A pszichológiai irodalomban a rokon jelenségek leírására a *metakogníció* terminus a konvencionális kifejezés. A fogalomról részletesebben tájékoztat *Nelson* (1992). Mindennek kiemelése annál is inkább fontos, mert a problémamegoldó tevékenységben a lehetőségek keresése hamis irányban rögzülhet. Ha a megoldó felismeri, hogy pillanatnyi elképzelése hibás, s képes a probléma más megközelítésére, a siker valószínűsége megnő.

E megfontolások alapján értelmezhető az is, hogy vizsgálatunkban a jobb matematika osztályzatú tanulók a tesztfeladatokra *jobbára* helyesen válaszoltak (gondoljunk a H mutatóra). Vagyis jellemző lehet a megoldási javaslatok igazságának megfelelő ellenőrzése (verifikáció). Sajnos a matematikaórákon ez az a „lépés”, amit a tanulók oly szívesen elhagynak: *a megoldás vizsgálata, az eredmény ellenőrzése*. Más kérdés, hogy ez különböző feladattípusok esetén mit jelent. Gondoljunk csak a számítások helyességének az ellenőrzésére, illetőleg egy geometriai szerkesztés befejezéseként annak eldöntésére, hogy a kapott alakzat megfelel-e a feltételeknek. Sokszor azonban többről van szó. Talán fontosabb lenne a tanulókat arra nevelni, hogy azt nézzék: hol tartanak, meddig jutottak el a megoldásban, és mi van még hátra. A *kontroll* a problémamegoldó tevékenységnek nem utolsó szakasza, hanem állandó kísérője.

A teljes képhez hozzátartozik, hogy könnyebb egy probléma megoldása, ha több releváns információval rendelkezünk. A matematikatanítás talán egyik legsúlyosabb problémája az előismereti hiányosságok kezelése. Ide tartozik az is, hogy különbség tehető a megértendő dolgok és a kifejezetten megtanulandó dolgok között. Ha valaki nem tudja, mit nevezünk a trapéz középvonalának, akkor hogyan tudná kiszámítani annak hosszát az oldalak ismeretében. Alapvető kell, hogy legyen a precíz, szabatos, de *szintspecifikus* szóhasználat, mert a matematikai igényesség kialakítása mellett a definíciókban, tételekben – ennélfogva a bizonyításokban, érvelésekben – szereplő lényeges elemek csak így kaphatnak kellő hangsúlyt ahhoz, hogy rögzítésük a további tanulmányok alapját képezhesse.

Előfordulhat még azoknál is, akik eredményesen tanulják a matematikát, hogy hiányzás, figyelmetlenség vagy egyéb okok miatt bizonyos fogalmak nem alakulnak ki a kívánatos szinten. Később minden egyes fogalom külön erőpróba, amelyeknek a megértése ezektől a fogalmaktól függ. A matematikában már a legkisebb hézag végzetes lehet: a hiány hiányokat szülve vezethet a teljes csődig. Említsük meg, hogy az ismeretszerzési folyamat során a tanuló gondolkodásában *egyéni magyarázóelvek* (belief systems) alapján felépülő tudás egyre nagyobb eltérést mutathat a helyes matematikai tartalmaktól, gondolatmenetektől (*Schoenfeld*, 1985; *Majoros*, 1992). Tematikus szempontból tehát nem meglepő, hogy a tanári osztályzatok szerinti sorrendben második helyen álló hetedikes tanulók a tesztek megoldásában magasabb teljesítményt nyújtottak, mint az ötödikesek.

Összegzés

Miképpen lehet a tanulók matematikai problémamegoldó tevékenységét erőteljesebbé és hatékonyabbá tenni? Hogyan értékeljük a teljesítményeket? Hiszen a vizsgák, a pedagógusok követelményei befolyásolják a felkészítést, a felkészülést.

A flexibilitás központi szerepet játszik a fogalomalakítási folyamatok és a problémamegoldó tevékenységek összes aspektusában, amelyek jellegzetesek a matematikai gondolkodásban (*Dreyfus* és *Eisenberg*, 1998). Vizsgálatunk megerősíti, hogy a tanulói teljesítmények (osztályzatok) hátterében bizonyos általános képességek különíthetők el. A jobb tanulók azért tudták megoldani a teszt feladatait – mondhatjuk –, mert általában jól oldanak meg matematikai feladatokat, a problémákról szélesebb vagy más reprezentációt képesek kialakítani, így beszélhetünk a problémák megfelelő reprezentálásáról (megértéséről), s metakogníciójuk is valószínűleg fejlettebb.

Ám bizonytalanság származhat a teljesítmény értékelésével, az osztályozással kapcsolatos (régtől fogva ismert) hibákból. Csaknem minden értékelő tevékenységben megmutatkozik a tanár szubjektív értékítélete. Ugyanakkor gyakran nem kis nyomás nehezedik a tanárokra, hogy jó jegyeket adjanak. Az osztályzatoknak tudvalévő „helyi értéke” van. Egy vizsgálat eredményei szerint a középiskolában a kevésbé jó képességű tanulók is kaphatnak jó jegyeket, és a jó gondolkodási képességűek sem mindig jó tanulók (*Csapó*, 1998).

Ma az iskolák produktumorientáltak: minősítéseinkben (osztályzatainkban) a jól megoldott feladatelemek arányára, az elért pontszámokra hivatkozunk. Valójában a „siker” érdekében egy okos, ugyanakkor szorgalmas tanuló az elemi matematika annyi eljárását *betanulhatja*, vagyis látszólag a tanulás megértésen alapul. A különbségre akkor derül fény, amikor a tananyag – lehet, hogy hosszú távon – oly bonyolulttá válik a számára, hogy mechanikus cselekvéssel már nem tud boldogulni.

Hangsúlyozzuk, a problémamegoldó tevékenységnek feltétele, hogy használható ismereteket, tapasztalatokat, továbbá gondolkodási és cselekvési sémákat birtokoljunk (*Schoenfeld*, 1985; *Owen* és *Sweller*, 1989; *Lawson*, 1990; *Sweller*, 1990). Szükség van a képletek, a definíciók, a tételek, s az úgynevezett rutinfeladatok ismeretére. Mégis félrevezethet tanulásuk kizárólagossága. Teljesen nyilvánvaló, hogy a probléma azért probléma, mert az éppen rendelkezésre álló ismeret nem elegendő a problémahelyzet megoldásához.

Ilyen körülmények között szükség van olyféle *érvényes*, egyben *megbízható* tesztekre, feladatlapokra, amelyek a tanítási-tanulási folyamatban a szaktanárokat, az iskola *klienseit* valamilyen paraméterekkel a különböző képességek fejlettségi szintjére is engedik következtetni. A képesség-jellegű tudás mérésére alkalmas feladatokról például (*Csapó*, 1993) tanulmányában olvashatunk.

Úgy véljük, hogy matematikatanításunkban előrelépés várható, ha a produktumorientáltság mellett teret nyer a *folyamatorientáltság*: gyakrabban és mélyrehatóan boncolgatjuk, hogyan és miért úgy gondolkodott a tanuló a feladatmegoldás folyamán, ahogyan. Az osztályzattal helyettesített értékelés *sztatikus*, szimplifikál, mi több, torzíthat. Márpedig a tanulói képességek fejlesztésekor felmerül a fejlődés regisztrálásának az igénye. Lehetséges, valamint üdvös lenne, ha *értékelésünk* kiterjedne többek között a tanulási és problémamegoldó stratégiákra, a metakognícióra, akár az affektív tényezőkre is (lásd például *Wittrock* és *Baker*, 1991). A fordulathoz számításba jöhet a gyakorló pedagógusok szemléletformálása.

Irodalom

Csapó Benő (1993): Tudásszintmérő tesztek. In: Falus Iván (szerk.): *Bevezetés a pedagógiai kutatás módszereibe*. Keraban Könyvkiadó, Budapest.

Csapó Benő (1998): Az iskolai tudás felszíni rétegei: mit tükröznek az osztályzatok? In: Csapó Benő (szerk.): *Az iskolai tudás*. Osiris Kiadó, Budapest.

Davidson, J. E. (1986): Insight and intellectual giftedness. In: Sternberg, R. J. és Davidson, J. E. (szerk.): *Conceptions of giftedness*. Cambridge University Press, New York.

Davidson, J. E. (1995): The suddennes of insight. In: Sternberg, R. J. és Davidson, J. E. (szerk.): *The nature of insight*. MIT Press, Cambridge, Mass.

Davidson, J. E. és Sternberg, R. J. (1986): What is insight? *Educational Horizons*, **64**. 177–179.

Dominowski, R. L. (1981): Comment on „An examination of the alleged role of „fixation" in the solution of several „insight" problems by Weisberg and Alba". *Journal of Experimental Psychology: General*, 110. 199–203.

Dominowski, R. L. és Dallob, P. (1995): Insight and problem solving. In: Sternberg, R. J. és Davidson, J. E. (szerk.): *The nature of insight*. MIT Press, Cambridge, Mass.

Dreyfus, T. és Eisenberg, T. (1998): A matematikai gondolkodás különböző oldalairól. In: Sternberg, R. J. és Ben-Zeev, T. (szerk.): *A matematikai gondolkodás természete*. Vince Kiadó Kft., Budapest.

Duncker, K. (1945): On problem solving. *Psychological Monographs*, **68**. 5. sz. 270.

Gick M. L. és Lockhart, R. S. (1995): Cognitive and affective components of insight. In: Sternberg, R. J. és Davidson, J. E. (szerk.): *The nature of insight*. MIT Press, Cambridge, Mass.

Graeber, A. O. (1994): Problem solving: Managing it all. *The Mathematics Teacher*. **87**. 3. sz. 195–199.

Greeno, J. G. (1987): Instructional representations based on research about understanding. In: Schoenfeld, A. H. (szerk.): *Cognitive science and mathematics education*. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, N. J.

Hajtman Béla (1971): *Bevezetés a matematikai statisztikába*. Akadémiai Kiadó, Budapest.

Horváth György (1984/1986): *A tartalmas gondolkodás*. Tankönyvkiadó, Budapest.

Horváth György (1993): *Bevezetés a tesztelméletbe*. Keraban Könyvkiadó, Budapest.

Horváth György (1997): *A modern tesztmodellek alkalmazása*. Akadémiai Kiadó, Budapest.

Keane, M. T. (1988): *Analogical problem solving*. Ellis Horwood Ltd., Chichester.

Keane, M. (1989): Modelling problem solving in Gestalt „insight" problems. *The Irish Journal of Psychology*, **10**. 201–215.

Kohler, W. (1929): *Gestalt* p*sychology*. Liveright, New York.

Kohler, W. (1969): *The task of Gestalt psychology*. Princeton University Press, Princeton, N. J.

Lénárd Ferenc (1978/1984): *A problémamegoldó gondolkodás*. Akadémiai Kiadó, Budapest.

Luchins, A. S. (1942): Mechanisation in problem solving. *Psychological Monographs*, *54:6*, Whole No. 248.

Luchins, A. S. és Luchins, E. H. (1950): New experimental attempts at preventing mechanization in problem solving. *Journal of General Psychology*, **42**. 279–297.

Lawson, M. J. (1990): The case for instruction in use of general problem–solving strategies in mathematics: A comment on Owen and Sweller (1989). *Journal for Research in Mathematics Education*, **21**. 5. sz. 403–410.

Majoros Mária (1992): *Oktassunk vagy buktassunk? (A tipikus matematikai hibák mögött rejlő gondolkodási mechanizmusok.)* Calibra Kiadó, Budapest.

Mayer, R. E. (1979): *Denken und Problemlösen: eine Einführung in menschliches Denken und Lernen*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

Mayer, R. E. (1995): The search for insight: Grappling with Gestalt psychology's unanswered questions. In: Sternberg, R. J. és Davidson, J. E. (szerk.): *The nature of insight*. MIT Press, Cambridge, Mass.

Metcalfe, J. (1986/1992): Dynamic metacognitive monitoring during problem solving. In: Nelson, T. O. (szerk.): *Metacognition: Core readings*. Allyn and Bacon, USA.

Metcalfe, J. és Weibe, D. (1987): Intuition in insight and noninsight problem solving. *Memory and Cognition*, **15**. 238–246.

Nagy József (1975): *A témazáró tesztek reliabilitása és validitása*. Acta Universitatis Szegediensis de A. J. Nominatae, Sectio Paedagogica, Series Specifica, Szeged.

Nelson, T. O. (1992, szerk.): *Metacognition: Core readings*. Allyn and Bacon, USA.

Novick, L. R. (1992): The role of expertise in solving arithmetic and algebra word problems by analogy. In: Cambell, J. J. D. (szerk.): *The nature and origins of mathematical skills*. Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam.

Ohlsson, S. (1984a): Restructuring revisited. I. Summary and critique of the Gestalt theory of problem solving. *Scandinavian Journal of Psychology*, **25**. 65–78.

Ohlsson, S. (1984b): Restructuring revisited. II. An information processing theory of restructuring and insight. *Scandinavian Journal of Psychology*, **25**. 117–129.

Owen, E. és Sweller, J. (1989): Should problem–solving be used as a learning device in mathematics? *Journal for Research in Mathematics Education*, **20**. 3. sz. 322–328.

Schoenfeld, A. H. (1985): *Mathematical problem solving*. Academic Press, New York.

Seifert, C. M., Meyer, D. E., Davidson, N., Patalano, A. L. és Yaniv, I. (1995): Demystification of cognitive insight: Opportunistic assimilation and the prepared–mind perspective. In: Sternberg, R. J. és Davidson, J. E. (szerk.): *The nature of insight*. MIT Press, Cambridge, Mass.

Solso, R. L. (1988): *Cognitive psychology*. Allyn and Bacon, Inc., Boston. 183–211.

Sternberg, R. J. és Davidson, J. E. (1995, szerk.): *The nature of insight*. MIT Press, Cambridge, Mass.

Sweller, J. (1990): On the limited evidence for the effectiveness of teaching general problem–solving strategies. *Journal for Research in Mathematics Education*, **21**. 5. sz. 411–415.

Weisberg, R. W. (1995): Prolegomena to theories of insight in problem solving: A taxonomy of problems. In: Sternberg, R. J. és Davidson, J. E. (szerk.): *The nature of insight*. MIT Press, Cambridge, Mass.

Weisberg, R. W. és Alba, J. W. (1981): An examination of the alleged role of „fixation" in the solution of several „insight" problems. *Journal of Experimental Psychology: General*, **110**. 169–192.

Weisberg, R. W. és Alba, J. W. (1982): Problem solving is not like perception: More on Gestalt theory. *Journal of Experimental Psychology: General*, **111**. 326–330.

Wertheimer, M. (1945/1959): *Productive thinking*. Harper, New York.

Wittrock, M. C. és Baker, E. L. (1991, szerk.): *Testing and cognition*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

ABSTRACT

JÓZSEF KONTRA: FLEXIBILITY IN THINKING AND MATHEMATICAL ACHIEVEMENT

The main purpose of this study is to report the attempts made to identify components involved in mathematical grades. With its focus on solutions rather than on strategies or processes, the current assessment procedure (grading) provides inadequate information about performance and if used reflects a fragmented view of mathematics rather than a view of knowledge as an integrated whole. What makes students differ in their performance in mathematics problems? In solving mathematical problems there are situations in which students do not already know what to do. They decide to abandon one approach and start another. To be efficient, the problem solvers need skills in how to manage the resources at their disposal. Specifically, the use of the term *flexibility* is addressed here. In our puzzle-problem approach to flexibility subjects were tested with challenging problems that do not lend themselves to obvious solutions. The introduction of this paper considers what a focus on insight offers us with respect to selecting new problems typified by the „*six mathsticks problem*" alleged to measure flexible thinking. Thus, for the tests several problems were collected from the literature on insight using a taxonomy (proposed by *Weisberg,* 1995). The other problems were constructed by a three-step procedure (see *Gick & Lockhart,* 1995). The research was carried out in 16 schools. Altogether 826 students were tested. The 5th grade sample consisted of 346 students and the 7th grade sample contained 480 students. It was found that students who had better grades were more likely to solve the testproblems correctly. Of course, any mathematical performance is built on a foundatian of basic mathematical knowledge. Within this context, we develop implications for measuring comprehension, learning strategies, and metacognitive processes. Taken together, these recommendations move us toward a broader concept of assessment.

Magyar Pedagógia, **99**. Number 2. 141–155. (1999)

Levelezési cím / Address for correspondence: Kontra József, H–7400 Kaposvár, Ezredév u. 10.